CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
COLEGIADO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
UNIOESTE - CAMPUS DE CASCAVEL

FERNANDA GUERRA
JHENIFFER RAFAELLY VIEIRA DA SILVA

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO I

PROMAT

CASCAVEL
2022

FERNANDA GUERRA
JHENIFFER RAFAELLY VIEIRA DA SILVA

METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO I

PROMAT

Relatório apresentado como requisito parcial da disciplina para aprovação.
Orientadora: Profª. Arleni Elise Sella Langer

CASCAVEL

2022

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.

Este trabalho tem por objetivo relatar as atividades desenvolvidas na disciplina de Metodologia e Prática de Matemática - Estágio Supervisionado I, oferecida no terceiro ano do curso de Licenciatura em Matemática da Unioeste – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, campus de Cascavel.

Ele é composto inicialmente com a descrição do que é o Promat – Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um enfoque à Área de Matemática, e posteriormente por um estudo e relato intitulado “Resolução de problemas no ensino de função afim”, onde trazemos um pouco sobre essa metodologia de ensino, seguida do relato de uma das atividades desenvolvidas no encontro que trabalhamos sobre função. Também estará presente neste trabalho, os planos de aula de cada um dos 10 encontros do Promat, seguidos dos relatórios, que descrevem o que aconteceu durante as respectivas aulas, e então materiais entregues aos alunos e os anexos. Nosso público-alvo, foram alunos da rede pública de ensino, com foco a estudantes do Ensino Médio.

Para o planejamento das aulas, usamos metodologias como a Resolução de Problemas, Investigação Matemática e História da Matemática. Utilizamos também materiais lúdicos e jogos, pois acreditamos que são muito importantes para o desenvolvimento do conhecimento dos alunos. Buscamos também trabalhar em grupos, para que houvesse diálogo e interação entre eles. Outro recurso usado foi o GeoGebra, um *software* com vários recursos matemáticos, principalmente na área e gráficos e geometria. Os problemas e exercícios trazidos em aula e entregues em listas, são de edições do ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio, e vestibulares, com o intuito de familiarizar os estudantes com esses formatos de questões.

Também faz parte deste relatório, o trabalho que fizemos no Colégio Estadual Olinda Truffa de Carvalho em comemoração ao Dia Nacional da Matemática, onde fizemos jogos e contamos sobre a história desse dia seguido do relato dessa experiência.

2. PROMAT.

O Promat – Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um enfoque à Área de Matemática, é um projeto de ensino institucional, ofertado pelo colegiado do curso de Licenciatura em Matemática da Unioeste – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, campus de Cascavel. Tem por objetivo atender alunos do Ensino Médio da rede pública estadual de ensino, que buscam acesso aos cursos superiores. No formato de “Curso Preparatório de Matemática”, objetiva também ofertar conteúdos da Educação básica exigidos nos vestibulares e no ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio.

O Programa é constituído por dois semestres, sendo que o primeiro é organizado e tem suas aulas ministradas pelos discentes do 3° ano da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino da Matemática – Estágio Supervisionado I, e orientados pelas professoras da matéria. Os conteúdos abordados nesse período são mais básicos e introdutórios. Já o segundo semestre é elaborado pelos discentes do 4° ano da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino da Matemática – Estágio Supervisionado II, também orientados por professores da matéria. Neste, os conteúdos são um pouco mais aprofundados.

Os encontros são realizados nas dependências da universidade, no período da manhã do sábado, com duração de 3 horas e 40 minutos cada, havendo um intervalo de 20 minutos. Para cada semestre é feito um processo novo de inscrições e seleção, sendo totalmente gratuito. No final do projeto, os alunos participantes ganham um certificado de participação no projeto.

Tendo em vista a importância desse projeto, busca-se trabalhar de forma que rompa os possíveis obstáculos que os estudantes tenham e trazem da escolarização. Para isso, as aulas são preparadas com várias referências, incluindo livros didáticos, materiais manipulativos e jogos confeccionados pelos próprios acadêmicos, sempre sob orientação e supervisão da professora orientadora.

3. ARTIGO.

Resolução de problemas no ensino de função afim.

Jheniffer Rafaelly Vieira da Silva
Unioeste
jheniffer.silva2@unioeste.br

Fernanda Guerra
Unioeste
fernanda.guerra3@unioeste.br

Resumo: o presente trabalho tratará de assuntos pertinentes ao ensino de função afim tendo como base a metodologia de ensino Resolução de problemas. No decorrer deste trabalho mostraremos resultados de um experimento realizado durante o PROMAT.

Palavras-chave: Resolução de problemas; função afim.

3.1 Ensino e aprendizagem de matemática na história.

O processo de ensinar e aprender matemática sofreu mudanças através dos anos. Ao pensar em um contexto histórico temos os ensinamentos baseados na obra Os Elementos de Euclides, no século III a.C, na qual o aprendizado acontecia seguindo uma sucessão de passos pré-determinados: definições, axiomas, postulados, teoremas e exercícios. Nesse contexto o ensinar matemática levava em conta aulas expositivas utilizando os conhecimentos geométricos apresentados em livros da época.

Mais adiante podemos considerar o ensino da matemática no início do século XX, em que o aprender matemática priorizava a memorização e a repetição mecânica de algoritmos e técnicas, todo o conhecimento era de posse do professor e o papel do aluno ali era de exercitar o que lhe era transmitido. Em uma tentativa de modernizar o ensino da matemática o Movimento da Matemática Moderna tomou forma no início da década de 60, Onuchic (1999, p. 202) diz que o Movimento da Matemática Moderna:

> Apresentava uma matemática estruturada, apoiada em estruturas lógica, algébrica, topológica e de ordem e enfatizava a teoria dos conjuntos. Realçava muitas propriedades, tinha preocupações excessivas com

> abstrações matemáticas e representava uma linguagem matemática universal, concisa e precisa. Entretanto, acentuava o ensino de símbolos e uma terminologia complexa que comprometia o aprendizado. Onuchic (1999, p. 202)

A proposta não foi bem-sucedida e no final da década de 70 já estava em extinção. Na busca de uma metodologia de ensino que auxiliasse na aprendizagem matemática por parte dos alunos, ao final do século XX começou se a estudar a utilização de problemas para ensino e aprendizagem efetiva dos alunos. Essa ideia teve grande influência de George Polya, e chamou a atenção de pesquisadores que posteriormente conduziram estudos trazendo grande destaque para a resolução de problemas como uma metodologia de ensino dentro da matemática.

Para Polya (1978), ter um problema significa buscar conscientemente por alguma ação apropriada para atingir um objetivo claramente definido, mas não imediatamente atingível. Levando para o contexto do ensino da matemática, isso proporcionaria um cenário rico para a aprendizagem, pois um problema matemático seria uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações para obter uma solução. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la, e durante essa construção os alunos estão fazendo matemática, e não apenas memorizando-a.

Villa e Calejo (2006, p.9) apontam benefícios em se empregar esta metodologia em aulas de matemática:

> O método baseado na resolução de problemas estimula os alunos a abordarem situações novas, a responderem a questões para as quais não conhecem uma resposta mecânica, a elaborarem estratégias de pensamento, a se fazerem perguntas, a aplicarem seus conhecimentos e suas habilidades a outras situações. Villa e Calejo (2006, p.9)

Tendo em vista os benefícios de trabalhar com essa metodologia de ensino, buscamos formular planos de aulas que promovessem aos estudantes a oportunidade de utilizar suas próprias habilidades e conhecimentos na formulação de estratégias que possibilitem a aquisição de novos saberes.

3.2 Ensino de função afim.

O assunto pertinente ao ensino de função tem importante relevância em documentos oficiais de educação como por exemplo no desenvolvimento da quinta competência apresentada na BNCC – Matemática e Suas Tecnologias (2017):

> Competência 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BNCC-2017, p. 523.)

Visando desenvolver de modo pleno a competência acima citada, o processo de ensino e aprendizagem de funções proporciona cenários próprios de investigação utilizando da resolução de problemas como ponto de partida. Durante o desenvolvimento do ensino aprendizagem os alunos podem encontrar relações de dependências e relações e posteriormente evoluir para uma noção de função.

Ainda na BNCC, no campo de inter-relações podemos encontrar que:

> A própria ideia de medida pode ser definida como uma função que associa um número real positivo (correspondente a certa quantidade de unidades) a um comprimento, área ou volume. (BRASIL,-2017, p. 521.)

Com esse estudo em mente desenvolvemos um plano de aula que se desenrolou no quinto encontro do PROMAT, utilizando da resolução de problemas para a elaboração de relações de dependências e posteriormente evoluindo para a noção de função afim. Em seguida apresentaremos o trabalho realizado em sala de aula baseado no estudo acima exposto.

3.3 Uma experiência no ensino de funções.

Planejamos a aula para ter início a partir do seguinte problema gerador: “Na Gincana Cultural escolar anual, as equipes participantes deveriam realizar uma prova que consistia em descobrir o número de bolinhas de gude necessárias para fazer com que o nível da água de um copo cilíndrico, parcialmente cheio, chegasse ao topo sem que transbordasse. A organização da gincana, por sugestão do professor de matemática, definiu que seria fornecido as equipes provetas graduadas com 100 mL de altura, com nível de água em 70mL e 8 bolinhas de gude idênticas. As equipes deveriam ir colocando as bolinhas uma a uma, registrando os níveis da água e, em alguns instantes dizer a quantidade de bolinhas necessárias. Venceria a equipe que respondesse corretamente e, em menos tempo. Se você estivesse participando da gincana, conseguiria ajudar sua equipe a prever essa quantidade.”

Após a disponibilização do problema e o momento de leitura, os materiais necessários para o desenvolvimento do experimento foram entregues aos grupos juntamente com as instruções de realização do experimento.

Instruções:

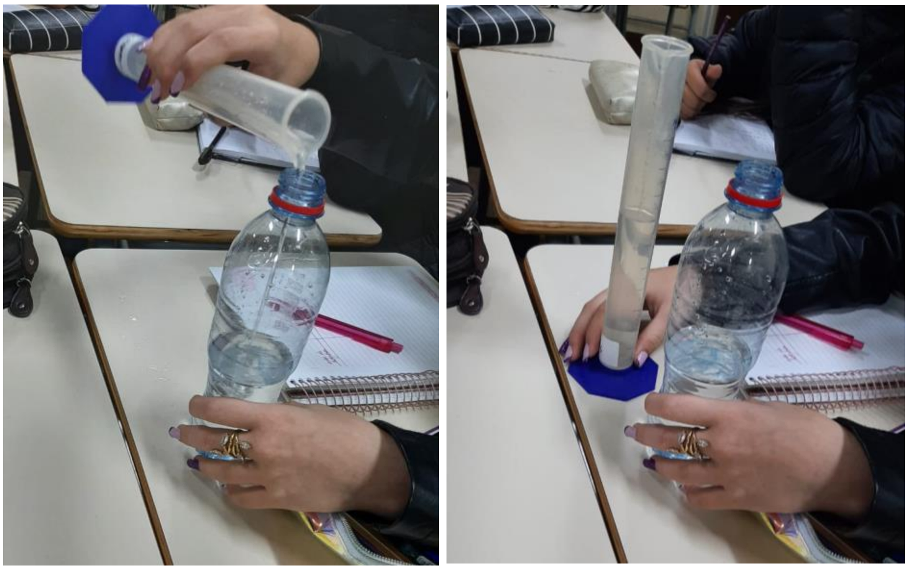
-Encher a proveta até a marca de 70ml;

-Construir uma tabela, ou algum meio para anotar os dados;

-Acrescentar as bolinhas uma a uma;

-Anotar a quantidade de bolinha e o nível de água correspondente.

Figura 1 Montagem do experimento.



Fonte: das autoras (2022)

Sugerimos que marcassem os resultados obtidos em forma de tabela, ou da maneira que acreditassem ser melhor para a compreensão. Também orientamos que as bolinhas deveriam ser acrescentadas uma a uma. A quantidade de bolinhas disponíveis não era suficiente para chegar à borda da proveta, então os estudantes precisariam determinar uma maneira de estimar qual o número de bolinhas necessárias para atender os critérios expostos no problema.

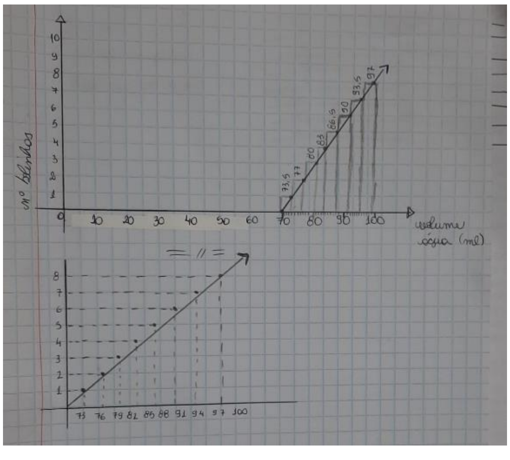
Figura 2 experimento pronto.

Fonte: das autoras 2022.

O ambiente criado para a realização do experimento possibilitou a interação dos estudantes em todo o processo de construção. Os grupos conseguiram a partir do experimento, determinar a quantidade de bolinhas necessárias para encher a proveta sem transbordá-la. Os caminhos para a obtenção dessa quantidade, foram diversos entre os grupos, alguns optaram por continuar a tabela estimando o nível de água, e outro pediu uma bolinha extra para testar se sua resposta foi coerente. Todo o processo até aqui foi feito mediante a percepção de relações entre as grandezas: bolinhas e nível de água.

Após esse momento de experimentação abordamos os conteúdos pertinentes ao ensino de função afim, sempre retomando o problema inicial com o objetivo de explorar o máximo possível os dados construídos pelos alunos.

Figura 3 gráfico nível de água em função ao número de bolinhas.



Fonte: produção dos alunos. Arquivos das autoras 2022.

3.4 Conclusão.

Planejar o encontro com o conteúdo de função afim a partir da resolução problema, promoveu a participação ativa dos alunos no processo de ensino aprendizagem. Percebemos o interesse dos estudantes em desenvolver o experimento com o objetivo de solucionar o problema inicial, bem como de verificar se suas resoluções estavam corretas.

Buscamos abordar em outros planos de aula a mesma metodologia, com o intuito de continuar incentivando os alunos, para que os mesmos se sentissem dispostos a participar ativamente do seu aprender.

3.5 Referências.

AZEVEDO, Ricardo S. Resolução de problemas no ensino de função afim. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/ricardo_azevedo.pdf.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Ensino Médio. Versão preliminar. Brasília: MEC, 2017.

BRESEGHELLHO, Andréia P. B. Resolução de problemas com aplicações em funções. São José do Rio Preto, 2016. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/136250/breseghello_apb_me_sjrp.pdf?sequence=5&isAllowed=y.

CARDOZO, MENEGHELLI e POSSAMAI. Concepções dos professores de matemática quanto a utilização de exercícios, situações contextualizadas e problemas. Amaz RECM - Especial Saberes Profissionais do Professor de Matemática, v.14, mar-out 2018, p.73-87. Disponível em: https://www.periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/index.

CARDOZO, MENEGHELLI, POSSAMAI e SILVA. Metodologia de resolução de problemas: concepções e estratégias de ensino. R. bras. Ens. Ci. Tecnol., Ponta Grossa, v. 11, set-dez. 2018, p.211-231. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect.

GOLÇALVES E ALLEVATO. Resolução de problemas: uma metodologia para aprendizagem significativa das funções definidas por várias sentenças. Encontro Nacional de Educação Matemática, São Paulo, 2016. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6152_3201_ID.pdf.

GUBERT, Arieus. A Resolução de Problemas Aplicada no Estudo das Funções. Programa de Desenvolvimento Educacional do Colégio Estadual João Negrão Júnior da Rede Pública do Estado do Paraná, 2008. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1787-8.pdf.

ONUCHIC, L. de L. R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. São Paulo: Unesp, 1999. p. 199-218.

PONTES, Método de Polya para resolução de problemas matemáticos: uma proposta metodológica para o ensino e aprendizagem de matemática na educação básica. HOLOS, v.3, jun 2019, p. 1-9. Disponível em: https://www2.ifrn.edu.br/ojs/index.php/HOLOS/.

ROMANATTO. Resolução de problemas nas aulas de Matemática. Revista Eletrônica de Educação. São Carlos, SP: UFSCar, v.6, mai. 2012, p.299-311 Disponível em http://www.reveduc.ufscar.br.

SILVA, José M. O ensino do conteúdo Funções na escola de Ensino Médio José Paulo de França da cidade de Mari – PB: o que dizem os professores? Universidade Federal da Paraíba, Mari-BP, 2013.

4. CRONOGRAMA.

Tabela 1 cronograma.

Encontro	Data	Conteúdos
1	05/03	Dinâmica de apresentação. Frações (operações); Razão e proporção.
2	12/03	Radiciação; potenciação; conjuntos numéricos.
3	19/03	Polinômios; produtos notáveis e fatoração.
4	26/03	Equações; sistemas; Introdução a função.
5	02/04	Função afim; função composta; funções com múltiplas sentenças.
6 (assíncrono)	09/04	Revisão dos encontros anteriores.
7	23/04	Função quadrática; resolução equação do segundo grau.
8	30/04	Geometria: triângulos.
9	07/05	Geometria: polígonos.
10	14/05	Geometria: circunferência.

5. ENCONTRO 1:

5.1. PLANO DE AULA 1 - 05/03/2022.

Conteúdo: Frações; Razão e proporção.

Público-alvo: 3° série do ensino médio.

Objetivo geral: Resolver situações problemas envolvendo frações e grandezas proporcionais.

Objetivos específicos:

- Comparar e ordenar frações;
- Resolver problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade, e associação entre razão e fração;
- Reconhecer frações irredutíveis e simplificar frações;
- Compreender os conceitos de razão e proporção entre grandezas associadas à ideia de incógnita;
- Compreender os conceitos de razão e proporção;

Tempo de execução: 3 horas e 40 minutos.

Recursos didáticos: Papel cartão, quadro, giz, canetinhas, cartões com as frações,

Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos o encontro recepcionando os alunos, e já entregando um pedaço de papel contendo um número de 1 a 8. Logo após a recepção, pediremos ajuda para organizar as cadeiras em círculo e iniciar a dinâmica de apresentação:

Dinâmica de apresentação: com os alunos organizados em círculo vamos iniciar as apresentações. Quem se sentir confortável deve se apresentar com o nome e alguma informação sobre si, pode ser um filme favorito, um livro, uma característica, alguma atividade que goste ou o que achar importante de compartilhar com o grupo.

Depois da primeira rodada iniciaremos uma nova, porém dessa vez o aluno deve tentar se lembrar do que o colega do lado disse na rodada anterior, com essa atividade queremos chamar a atenção sobre a importância de se ouvir o que o outro fala também.

(**30 min)**

Logo após solicitaremos que os alunos se organizem em grupos, de acordo com a numeração que receberam no início da aula. Então vamos explicar que a sala será sempre organizada em grupos com o objetivo de melhor atendê-los, especialmente, durante as atividades.

Distribuiremos um pedaço de papel cartão e pediremos que os alunos escrevam seu nome, apelido ou a maneira que desejam ser chamados durante os encontros, e solicitaremos que coloquem o crachá de pescoço para identificação. **(5 min)**

Para iniciar o conteúdo sobre frações vamos propor um jogo a turma, o “Papa tudo das frações”.

Instruções do jogo: colocaremos no centro das mesas cartões com diversas frações escritas (próprias, impróprias), os cartões estarão com as faces escritas viradas para baixo. Ao início da primeira rodada, todos os participantes deverão comprar uma carta no monte e em seguida comparar as cartas entre si, vence a rodada quem tiver a maior fração. O vencedor “papa” todas as cartas dispostas na mesa durante aquela rodada. Ao terminar todas as cartas vence o jogador que conseguiu “papar” mais.

(25-30min)

Após a realização do jogo faremos uma discussão e análise de quais foram os métodos/estratégias que usaram para verificar qual fração era maior. Posteriormente, vamos formalizar conceitos a respeito do conteúdo:

- Uma fração é a representação de uma ou mais partes de algo que foi dividido em partes iguais.
- Representação: Dois números inteiros a, b com b≠0 escritos da forma $\frac{a}{b}$ representam uma fração, na qual a é o numerador e b o denominador.
- Frações podem representar números menores que um inteiro, são chamadas de frações próprias.

Frações podem representar números maiores que um inteiro, são chamadas de frações impróprias.

Frações também representam números inteiros, são conhecidas como frações aparentes.

- Operação com fração:

Adição: quando os denominadores são iguais basta somar os numeradores e conservar o denominador comum. Caso denominadores forem diferentes precisa deixá-los iguais determinando o MMC, ou por frações equivalentes.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + c.b}{b.d}$$

Subtração: quando os denominadores são iguais basta subtrair os numeradores e conservar o denominador comum. Caso denominadores forem diferentes precisa deixá-los iguais determinando o MMC, ou por frações equivalentes.

$\frac{a}{b}$ - $\frac{c}{d}$ $= \frac{a.d - c.b}{b.d}$

Multiplicação: para realizar o produto entre frações basta multiplicar numerador com numerador e denominador com denominador.

$\frac{a}{b}$ - $\frac{c}{d}$ $= \frac{a.c}{b.d}$

Divisão: para realizar divisão entre frações, multiplica a primeira pelo inverso da segunda.

$\frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \Big/ \frac{d}{c}$

Potenciação: potência com números fracionários pode ser feita para o numerador e o denominador separadamente.

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{(a)^n}{(b)^n}$

Radiciação: a raiz de um número fracionário pode extraída para o numerador e o denominador separadamente.

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

(20min)

Na sequência faremos representações fracionárias utilizando a sala de aula, e usaremos para introduzir o conceito de razão. O primeiro questionamento será: “Quantas pessoas há na sala?”.

Atividade I:

1- Em relação ao total de alunos:

a) Qual fração representa a quantidade dos alunos que não moram em Cascavel?

b) Represente de forma fracionária a quantidade de alunos que estão de camiseta preta.

Então, abordaremos a definição de razão: estabelece uma comparação entre duas grandezas, sendo o coeficiente entre dois números. Sejam essas grandezas *a* e *b*, a razão entre elas será $\frac{a}{b}$.

Em seguida retornaremos à atividade I e analisaremos as informações como razões, e faremos ainda mais algumas relações:

Atividade II:

1- Qual a razão entre a quantidade total de alunos e a quantidade de carteiras?

2- Quantidade de professoras com o total de pessoas.

(10-15min)

Após concluirmos a atividade, abordaremos as representações em forma de porcentagem. Retomaremos então os resultados anteriores com o intuito de verificar as porcentagens envolvidas nos dados registrados. Nesse momento traremos o conceito da porcentagem, enfatizando sobre o significado de "por cento", assim trabalhamos que, por exemplo, 15 % de 130, pode ser escrito como $\frac{15}{100}$ de 130, e que o "de" representa uma multiplicação. **(10min)**

Solicitaremos em seguida que os alunos resolvam os exercícios 1, 2 e 3 da lista de atividades**.** Faremos a resolução no quadro juntos uns minutos depois, tirando as dúvidas e analisando as resoluções propostas pelos alunos. **(10-15min)**
Posteriormente abordaremos densidade demográfica a partir da resolução de um problema.

(ENEM - 2011) Cerca de 20 milhões de brasileiros vivem na região coberta pela caatinga, em quase 800 mil km² de área. Quando não chove, o homem do sertão e sua família precisam caminhar quilômetros em busca da água dos açudes. A irregularidade climática é um dos fatores que mais interfere na vida do sertanejo. Segundo este levantamento, a densidade demográfica da região coberta pela caatinga, em habitantes por km², é de:

a) 250
b) 25
c) 2,5
d) 0,25
e) 0,025

Densidade demográfica: expressa o número de habitantes por quilômetro quadrado de uma região. Assim, densidade demográfica é a razão entre o número de habitantes e a área da região ocupada.

(10 min)

Na sequência, usaremos a resolução de problemas para ensinar cada proporção após ser enunciada.

- Proporção: Quando há a igualdade entre duas razões, podemos encontrar a proporção entre elas. Ou seja, se duas frações possuem a mesma razão então, elas são proporcionais. Dessa forma, se a razão entre os números a e b for igual à razão entre os números c e d, teremos que a/b = c/d, que é uma proporção.

- Grandezas diretamente proporcionais: Duas grandezas são diretamente proporcionais quando, aumentando uma delas, a outra também aumenta na mesma proporção, ou, diminuindo uma delas, a outra também diminui na mesma proporção. (mencionar sobre a famosa “regra de três simples”)

(ENEM - 2012) Nos shopping centers, costumam existir parques com vários brinquedos e jogos. Os usuários colocam créditos em um cartão, que são descontados por período de uso dos jogos. Dependendo da pontuação da criança no jogo, ela recebe certo número de tíquetes para trocar por produtos nas lojas dos parques. Suponha que o período de uso de um brinquedo em certo shopping custa R$ 3 e que uma bicicleta custa 9200 tíquetes.

Para uma criança que recebe 20 tíquetes por tempo de jogo, o valor, em reais, gasto com créditos para obter a quantidade de tíquetes para trocar pela bicicleta é

A) 153.
B) 460.
C) 1218.
D) 1380.
E) 3066.

(10min)

- Grandezas inversamente proporcionais: aumentando uma delas, a outra diminui na mesma proporção, e vice-versa.

Durante as eleições, uma gráfica recebeu um pedido muito grande para realizar a produção de material de campanha. Estimou-se que as 3 máquinas levariam 24 horas para realizar todo o serviço. Supondo que uma dessas máquinas estrague antes de iniciar o serviço, qual será o tempo necessário para atender essa demanda?

A) 30 horas
B) 20 horas
C) 26 horas
D) 36 horas
E) 40 horas

(10min)

- Regra de três composta é um processo de relacionamento de grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou uma mistura dessas situações.

(UFPE) Dez guindastes carregam 180 caixas em um navio em 12 dias com 5 horas de trabalho diárias. Quantas caixas serão carregadas em 15 dias, por 12 guindastes, trabalhando 4 horas por dia? A) 216 C) 212 E) 208 B) 214 D) 210

(10min)

(ENEM - 2020) Um agricultor sabe que a colheita da safra de soja será concluída em 120 dias caso utilize, durante 10 horas por dia, 20 máquinas de um modelo antigo, que colhem 2 hectares por hora. Com o objetivo de diminuir o tempo de colheita, esse agricultor optou por utilizar máquinas de um novo modelo, que operam 12 horas por dia e colhem 4 hectares por hora. Quantas máquinas do novo modelo ele necessita adquirir para que consiga efetuar a colheita da safra em 100 dias? A) 7 C) 15 E) 58 B) 10 D) 40

(10min)

Caso tenhamos tempo, encerraremos deixando que eles continuem a resolução dos problemas.

Avaliação: A avaliação será de maneira contínua, observando a participação e registro dos alunos durante o desenvolvimento da aula; e, também a resolução da lista proposta.

Referências:

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação Infantil e Ensino Fundamental. Versão final. Brasília: MEC, 2017.

EXERCÍCIO SOBRE GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS. Disponível em: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-grandezas-inversamente-proporcionais.htm#resp-1. Acessado em: 28 nov. 2021.

FERREIRA, Maria do Socorro Braz. Razão, proporção e regra de três. 2016. 42 f. Monografia (Especialização) – Coordenação do Curso de Especialização em Ensino da Matemática para o Ensino Médio, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Rurais Novos/RN, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/bitstream/123456789/43822/2/TCC-%20Maria%20do%20Socorro%20Braz.pdf. Acesso em: 7 dez. 2021.

OBMEP PROBLEMAS COM FRAÇÕES. Disponível em: https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/a2q8zswiivk84.pdf. Acessado em: 28 nov. 2021.

OBMEP QUESTOES DE RAZÃO E PROPORÇÃO. Disponível em: https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/8aen0s25bi4gc.pdf. Acessado em: 28 nov. 2021.

PARANÁ. **Currículo da Rede Estadual do Paraná** (CREP): Matemática. Curitiba: SEED, 2019.

QUESTÕES DO ENEM RAZÃO E PROPORÇÃO. Disponível em: https://www.qconcursos.com/questoes-doenem/questoesdiscipline. Acessado em: 28 nov.2021.

REGRA DE TRÊS COMPOSTA, ENEM. Disponível em: https://soexercicios.com.br/plataforma/questoes-de-vestibular/ENEM/23774/-regra-de-tres-composta-/1. Acesso em: 7 dez. 2021.

5.2. RELATÓRIO AULA 1.

Aos cinco dias do mês de março do ano de 2022, realizamos o primeiro encontro do Promat – Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – Unioeste, no bloco A, sala 104. Nesse encontro, os conteúdos abordados foram fração, razão e proporção. Antes da chegada dos alunos, instalamos o computador e o projetor, e já deixamos a sala organizada com oito grupos de cinco carteiras cada.

Conforme os alunos chegavam, recebiam um crachá onde deveriam escrever o nome ou a maneira como queriam ser chamados durante as aulas. Quando chegou o horário da aula, às 8 horas, iniciamos a dinâmica de apresentação. Depois que todos se apresentaram pedimos para que então, cada aluno dissesse o nome do colega ao seu lado e, tentasse lembrar o que ele (esse colega) havia dito na apresentação. No final, explicamos que o objetivo da dinâmica era que sempre lembrássemos de ouvir e prestar atenção no que o outro fala, porque podemos sempre aprender uns com os outros.

Na sequência explicamos que eles sempre estariam divididos em grupos, para facilitar nosso entrosamento e, para que pudéssemos auxiliá-los melhor.

Aplicamos, então o jogo “O papa tudo das frações”. Nesse momento pudemos analisar como e quais estratégias os alunos usavam para comparar as frações, já que esse era o objetivo principal do jogo. Alguns faziam as divisões no caderno e usavam o valor decimal para comparar, outros faziam mentalmente e, em um dos grupos, surgiu a ideia de se usar frações equivalentes; eles simplificavam as frações quando possível e as comparavam. Percebemos que um dos grupos necessitou de uma atenção maior, pois os participantes mostraram mais dificuldade para reconhecer e comparar as frações. O jogo demorou mais do que o previsto, pois alguns alunos chegaram depois do início da aula. No final do jogo fizemos a chamada, totalizando 21 alunos presentes.

Posteriormente passamos no quadro algumas definições e pedimos aos alunos o que vinha na mente deles quando ouviam a palavra frações, responderam “comida” e “divisão”. A cada definição dávamos um exemplo de fração (que os próprios alunos diziam), e explicávamos com base no exemplo que deram. A primeira utilizada foi 9/3 usado para definição de fração. Para fração próprias, um aluno disse a fração 8/9, pedimos o porquê era e ele respondeu que “9 não cabe no 8”. Fração imprópria o aluno disse 15/4 e sua justificativa foi que “4 cabe mais que uma vez no 15”. Para fração aparente um aluno disse 12/3 porque “o 3 cabe 4 vezes no 12”.

Ao questionarmos sobre a soma de frações, os alunos disseram que aprenderam pelo método do Mínimo Múltiplo Comum, MMC. Afirmaram, “encontra o MMC, divide pelo de baixo e multiplica pelo de cima”. Mostramos como usar frações equivalentes para fazer a soma também. A subtração explicamos ser análogo a soma, falamos sobre multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. Junto com os alunos fizemos a razão entre o número de pessoas que moravam em outras cidades pelos que residem em Cascavel, tivemos 11 alunos de fora, ao perguntar qual seria a razão, responderam “23/11” e então explicamos que o todo eram as 23 pessoas da sala e a parte do todo os 11 alunos não residentes de Cascavel, então a razão seria 11/23. Ao perguntar como seria a razão dos que moram em Cascavel pela quantidade total, responderam 12/23, ao serem questionados da resposta disseram “12 porque diminuem dos que não moram”.

Então, em seguida, resolvemos os três primeiros problemas da lista, que tratavam de comparações, adição, subtração e multiplicação de frações. Na resolução do segundo problema, que falava sobre as frações que representavam os lugares reservados de uma viajem turística, uma aluna apresentou uma resolução diferente da proposta por nós no quadro: ela somou as duas frações das vagas e depois viu quanto equivalia em relação aos 120 lugares; então subtraiu para encontrar quantas sobraram, foto da resolução apêndice....

Resolvemos um exercício sobre densidade demográfica e entramos no assunto de proporção, utilizando a metodologia da Resolução de problemas para introduzir esse conteúdo.

Durante a resolução dos problemas introdutórios, utilizamos a notação em tabelas para organizar as informações fornecidas neles. Pedimos também, a participação dos alunos com ideias e sugestões, para que pudéssemos trabalhar com os conhecimentos prévios dos alunos.

No final da aula, distribuímos um chocolate de boas-vindas aos alunos, e aos ganhadores do jogo “O papa tudo das frações”, demos mais um chocolate e uma bala. Agradecemos a presença de todos e encerramos o primeiro encontro.

5.3. MATERIAL ENTREGUE.

Lista de exercícios frações.

1- (ENEM-2020) Um jogo pedagógico é formado por cartas nas quais está impressa uma fração em uma de suas faces. Cada jogador recebe quatro cartas e, vence aquele que primeiro consegue ordenar crescentemente suas cartas pelas respectivas frações impressas. O vencedor foi o aluno que recebeu as cartas com as frações: $\frac{3}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}$ e $\frac{5}{9}$. A ordem que esse aluno apresentou foi:

a) $\frac{1}{4}, \frac{5}{9}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{9}$ c) $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$ d) $\frac{5}{9}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$ e) $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{4}, \frac{5}{9}$

2- (ENEM-2011) Uma agência de viagens de São Paulo (SP) está organizando um pacote turístico com destino à cidade de Foz do Iguaçu (PR) e fretou um avião com 120 lugares. Do total de lugares, reservou $\frac{2}{5}$ das vagas para as pessoas que residem na capital do estado de São Paulo, $\frac{3}{8}$ para as que moram no interior desse estado e o restante para as que residem fora dele. Quantas vagas estão reservadas no avião para as pessoas que moram fora do estado de São Paulo?

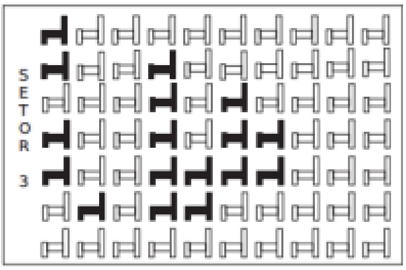
a) 27 b) 40 c) 45 d) 74 e) 81

3- (OBM-2013) Os gatos Mate e Tica estão dormindo no sofá. Mate chegou antes e quando tica chegou, ela ocupou um quarto da superfície que havia sobrado do sofá. Os dois juntos ocupam exatamente a metade da superfície do sofá. Qual parte da superfície do sofá está ocupada por Tica?

a) $\frac{1}{12}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{2}$

4- (ENEM-2013) Em um certo teatro, as poltronas são divididas em setores. A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas as claras não foram vendidas. A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é:

Figura 4.poltronas



Fonte: ENEM-2013

a) $\frac{17}{70}$ d) $\frac{53}{17}$ b) $\frac{17}{53}$ e) $\frac{70}{17}$ c) $\frac{53}{70}$

5- (ENEM-2010) Grandes times nacionais e internacionais utilizam dados estatísticos para a definição do time que sairá jogando numa partida. Por exemplo, nos últimos treinos, dos chutes a gol feito pelo jogador I, ele converteu 45 chutes em gol. Enquanto isso, o jogador II acertou 50 gols. Quem deve ser selecionado para estar no time no próximo jogo, já que os dois jogam na mesma posição? A decisão parece simples, porém deve-se levar em conta quantos chutes a gol cada um teve oportunidade de executar. Se o jogador I chutou 60 bolas a gol e o jogador II chutou 75, quem deveria ser escolhido?

a) O jogador I, porque acertou $\frac{3}{4}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{3}$ dos chutes.

b) O jogador I, porque acertou $\frac{4}{3}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{3}$ dos chutes.

c) O jogador I, porque acertou $\frac{3}{4}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{3}{2}$ dos chutes.

d) O jogador I, porque acertou $\frac{12}{25}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{3}$ dos chutes.

e) O jogador I, porque acertou $\frac{9}{25}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{5}$ dos chutes.

6- (ENEM-2013) Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes. Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1500 telhas ou 1200 tijolos. Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados a carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

a) 300 tijolos. b) 360 tijolos. c) 400 tijolos. d) 480 tijolos. e) 600 tijolos.

7- (ENEM-2018) O presidente de uma empresa, com o objetivo de renovar sua frota de automóveis, solicitou uma pesquisa medindo o consumo de combustível de 5 modelos de carro que usam o mesmo tipo de combustível. O resultado foi:

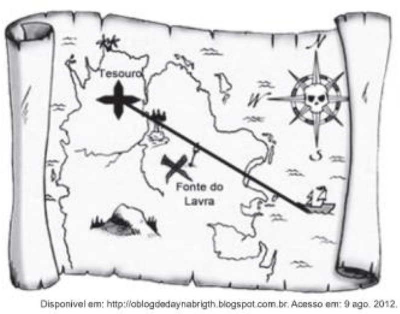
• Carro I: deslocamento de 195 km consumindo 20 litros de combustível;
• Carro II: deslocamento de 96 km consumindo 12 litros de combustível;
• Carro III: deslocamento de 145 km consumindo 16 litros de combustível;
• Carro IV: deslocamento de 225 km consumindo 24 litros de combustível;
• Carro V: deslocamento de 65 km consumindo 8 litros de combustível.

Para renovar a frota com o modelo mais econômico, em relação à razão quilômetro rodado por litro, devem ser comprados carros do modelo

a) I b) II c) III d) IV e) V

8- (ENEM-2018) Um mapa é a representação reduzida e simplificada de uma localidade. Essa redução, que é feita com o uso de uma escala, mantém a proporção do espaço representado em relação ao espaço real. Certo mapa tem escala 1 : 58 000 000.

Figura 5: mapa



Fonte: ENEM 2018

Considere que, nesse mapa, o segmento de reta que liga o navio à marca do tesouro meça 7,6 cm. A medida real, em quilômetro, desse segmento de reta é:

a) 4 408 b) 7 632 c) 44 080 d) 76 316 e) 440 800

9- (ENEM-2010) As Olimpíadas de 2016 serão realizadas na cidade do Rio de Janeiro. Uma das modalidades que trazem esperanças de medalhas para o Brasil é a natação. Aliás, a piscina olímpica merece uma atenção especial devido as suas dimensões. Piscinas olímpicas têm 50 metros de comprimento por 25 metros de largura. Se a piscina olímpica fosse representada em uma escala de 1:100, ela ficaria com as medidas de

a) 0,5 centímetro de comprimento e 0,25 centímetro de largura.

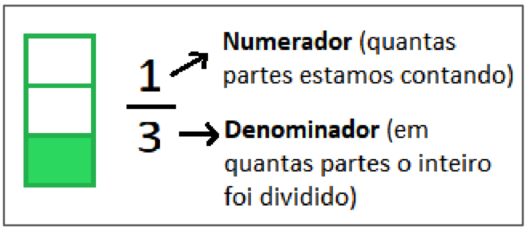
b) 5 centímetros de comprimento e 2,5 centímetros de largura.

c) 50 centímetros de comprimento e 25 centímetros de largura.

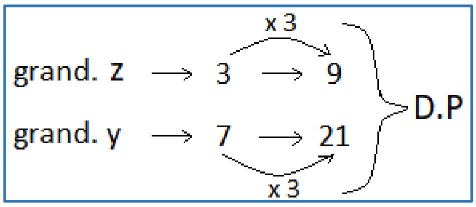
d) 500 centímetros de comprimento e 250 centímetros de largura.

e) 200 centímetros de comprimento e 400 centímetros de largura.

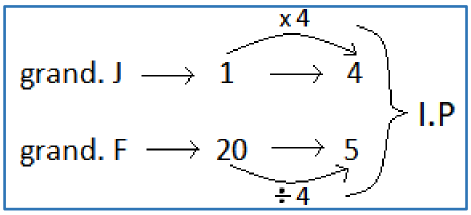
RESUMÃO DE FRAÇÕES, RAZÃO E PROPORÇÃO



- Uma **fração** é a representação de uma ou mais partes de algo que foi dividido em partes iguais, ou seja, fração é uma divisão.
- Para **somar ou subtrair** frações basta encontrar frações equivalentes, com denominadores iguais e realizar a operação.
- Para **multiplicar** frações é só multiplicar Numerador com Numerador e Denominador com Denominador.
- Para **dividir** frações basta multiplicar uma pelo inverso da outra.
- **Razão**: estabelece uma comparação entre duas grandezas, sendo o coeficiente/divisão entre dois números.
- **Proporção**: Quando há a igualdade entre duas razões, podemos encontrar a proporção entre elas.



- **Grandezas diretamente proporcionais (D.P)**: aumentando uma delas, a outra também aumenta na mesma proporção, ou, diminuindo uma delas, a outra também diminui na mesma proporção.



- **Grandezas inversamente proporcionais (I.P)**: aumentando uma delas, a outra diminui na mesma proporção, e vice-versa.
- **Regra de três compostas** é um processo de relacionamento de grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou uma mistura dessas situações.

5.4. RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS.

Resolução dos exercícios propostos em sala de aula

(ENEM - 2011) Cerca de 20 milhões de brasileiros vivem na região coberta pela caatinga, em quase 800 mil km² de área. Quando não chove, o homem do sertão e sua família precisam caminhar quilômetros em busca da água dos açudes. A irregularidade climática é um dos fatores que mais interferem na vida do sertanejo. Segundo este levantamento, a densidade demográfica da região coberta pela caatinga, em habitantes por km², é de:

A) 250 B) 25 C) 2,5 D) 0,25 E) 0,025

Resolução:

Temos uma área de 800 mil km² com 20 milhões de habitantes, para descobrir quantos habitantes temos por km², basta dividirmos os habitantes pela área, assim teremos: $\frac{20000000}{800000}$. Usando frações equivalentes, podemos dividir numerador e denominador por 100000 (100 mil), assim teremos $\frac{20000000 \div 100000}{800000 \div 100000} = \frac{200}{8}$. Notamos que ainda podemos reduzir essa fração, $\frac{200 \div 8}{8 \div 8} = \frac{25}{1} = 25$. Logo a alternativa correta é a letra B) Ao resolver com os alunos, será pedido a interação deles e a resolução será baseada nos meios/caminhos que pensaram para chegar na solução. Vale lembrar, que a simplificação das frações não precisa ser direta como feita na nessa resolução, os estudantes podem ir reduzindo conforme percebem que é possível.

(ENEM - 2012) Nos shopping centers, costumam existir parques com vários brinquedos e jogos. Os usuários colocam créditos em um cartão, que são descontados por período de uso dos jogos. Dependendo da pontuação da criança no jogo, ela recebe certo número de tíquetes para trocar por produtos nas lojas dos parques. Suponha que o período de uso de um brinquedo em certo shopping custa R$ 3 e que uma bicicleta custa 9200 tíquetes.

Para uma criança que recebe 20 tíquetes por tempo de jogo, o valor, em reais, gasto com créditos para obter a quantidade de tíquetes para trocar pela bicicleta é

A) 153 B) 460 C) 1218 D)1380 E) 3066

Resolução:

Temos formas diferentes de resolver esse problema, vamos ver três delas:

I- Primeiramente deve ser analisado se é uma grandeza diretamente proporcional, ou seja, questionar os alunos que se aumentar o número de vezes que a criança jogar irá aumentar o valor que ele gastará? Espera-se que a resposta seja afirmativa, caso contrário devemos retornar ao enunciado e tentar esclarecer o porquê é diretamente proporcional. O mesmo deve ser analisado em relação ao número de tíquetes e de jogos que ele precisará para trocá-los pela bicicleta. Vamos sugerir que montem uma tabela:

Tabela 2 jogos/tíquetes

Jogos	**Tíquetes**
1	20
x	9200

Agora podemos usar a propriedade das grandezas diretamente proporcionais, temos

$$\frac{1}{x} = \frac{20}{9200} \Rightarrow 9200 = 20x \Rightarrow \frac{9200}{20} = \frac{20x}{20} \Rightarrow 460 = x$$

Assim sabemos que ele terá que jogar 460 vezes para obter a quantidade de tíquetes necessária para trocar pela bicicleta.

De forma análoga, solucionaremos então o valor em dinheiro que ela gastará

Tabela 3 jogos/ valor em reais

Jogos	**Valor em reais**
1	3
460	x

Temos:

$$\frac{1}{460} = \frac{3}{x} \Rightarrow 460 \cdot 3 = x \Rightarrow 1380 = x$$

Então a criança irá gastar 1380 reais, que corresponde a letra D) do problema.

II- A segunda forma que podemos interpretar/pensar para solucionar esse problema, é questionar, se a criança precisa de 9200 tíquetes, e cada jogo ela ganha 20, quantos jogos ela precisa para juntar a quantia necessária? Assim, basta dividir 9200 por 20, que obterá o resultado 460. Posteriormente, de forma análoga e usando o resultado anterior, se cada partida custa 3 reais, quanto custará 460 partidas? Basta multiplicar 460 por 3, o que nos proporciona também os 1380 reais gastos pela criança.

III- Uma terceira forma, é montar outra tabela e analisar o que acontece após algumas jogadas. Partimos de que em um jogo ganhamos 20 típquetes, em dez jogos, ganhamos 200 tíquetes ($10 \cdot 20$) e assim sucessivamente, até chegarmos nos 9200 tíquetes necessários.

Tabela 4 jogos/ tíquetes 2

Jogos	Tíquetes
1	20
10	200
50	1000
100	2000
400	8000
450	9000
460	9200

Concluímos que ele precisa jogar 460 vezes. Da mesma forma vamos analisar o que acontece com o valor gasto.

Tabela 5 jogos/ valor em reais completa

Jogos	Valor em reais
1	3
10	30
100	300
200	600
400	1200
60	180
460	1380

Dessa forma, também chegamos no valor gasto de 1380 reais pela criança.

(Exercício) Durante as eleições, uma gráfica recebeu um pedido muito grande para realizar a produção de material de campanha. Estimou-se que as 3 máquinas levariam

24 horas para realizar todo o serviço. Supondo que uma dessas máquinas estrague antes de iniciar o serviço, qual será o tempo necessário para atender essa demanda?

A) 30 horas B) 20 horas C) 26 horas D) 36 horas E) 40 horas

Resolução:

Como no problema anterior, primeiramente precisamos analisar o que está acontecendo com as grandezas. Nesse caso, diminuiu a quantidade de máquinas consequentemente irá aumentar o tempo de produção, logo são grandezas inversamente proporcionais. Como feito anteriormente, uma tabela pode ajudar nessa análise.

Tabela 6 máquina/ tempo

Máquinas	**Tempo**
3	24
2	X

Assim, usando a propriedade da grandeza inversamente proporcional temos:

$$3 \cdot 24 = 2 \cdot x \Rightarrow 72 = 2 \cdot x \Rightarrow \frac{72}{2} = \frac{2 \cdot x}{2} \Rightarrow 36 = x$$

Portanto, a resposta será a alternativa D).

(UFPE) Dez guindastes carregam 180 caixas em um navio em 12 dias com 5 horas de trabalho diárias. Quantas caixas serão carregadas em 15 dias, por 12 guindastes, trabalhando 4 horas por dia?

A) 216 B) 214 C) 212 D) 210 E) 208

Resolução:

Novamente precisamos analisar o que acontece com cada grandeza, e uma tabela ajudará nesse processo.

Tabela 7 regra de três composta

Guindastes	**Caixas**	**Dias**	**Horas**
10	180	12	5
12	x	15	4

I- Se aumenta o número de guindastes, aumenta o número de caixas carregadas;

II- Se aumenta o número de dias, aumenta o número de caixas carregadas;

III- Se diminui o número de horas, diminui o número de caixas carregadas.

Assim, vemos que nos três casos são grandezas diretamente proporcionais, portanto teremos:

$$\frac{180}{x} = \frac{10}{12} \cdot \frac{12}{15} \cdot \frac{5}{4}$$

Nesse momento falaremos como organizar os dados para resolver o problema e faremos as simplificações possíveis no segundo membro, podendo dividir 12 por 12 que teremos resultado 1, simplificar o 15 e o 5, e o 10 e 4, ficamos então com:

$$\frac{180}{x} = \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{180}{x} = \frac{5}{6} \Rightarrow 180 \cdot 6 = 5 \cdot x \Rightarrow 1080 = 5 \cdot x \Rightarrow \frac{1080}{5} = x \Rightarrow 216 = x$$

Sendo assim, serão carregadas 216 caixas, que corresponde a alternativa A).

(ENEM - 2020) Um agricultor sabe que a colheita da safra de soja será concluída em 120 dias caso utilize, durante 10 horas por dia, 20 máquinas de um modelo antigo, que colhem 2 hectares por hora. Com o objetivo de diminuir o tempo de colheita, esse agricultor optou por utilizar máquinas de um novo modelo, que operam 12 horas por dia e colhem 4 hectares por hora.

Quantas máquinas do novo modelo ele necessita adquirir para que consiga efetuar a colheita da safra em 100 dias?

A) 7 B) 10 C) 15 D) 40 E) 58

Resolução:

Montando a tabela temos:

Tabela 8 regra de três

Dias	Horas	Máquinas	Hectares/hora
120	10	20	2
100	12	x	4

Analisando o que acontece com cada grandeza temos:

I- Se diminui o número de dias, então deve aumentar o número de máquinas (inversamente proporcional);

II- Se aumenta o número de horas, diminui o número de máquinas (inversamente proporcional);

III- Se aumenta o número de hectares colhidos por hora, diminui o número de máquinas (inversamente proporcional.

Notamos que todas são grandezas inversamente proporcionais, então teremos:

$$\frac{20}{x} = \frac{100}{120} \cdot \frac{12}{10} \cdot \frac{4}{2}$$

Fazendo as simplificações ficamos com:

$$\frac{20}{x} = \frac{10}{30} \cdot \frac{6}{1} \cdot \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{20}{x} = \frac{60}{30} \Rightarrow \frac{20}{x} = 2 \Rightarrow 20 = 2 \cdot x \Rightarrow \frac{20}{2} = x \Rightarrow 10 = x$$

Portanto, o agricultor precisará de 10 máquinas, ou seja, alternativa B).

Resolução da lista.

1- (ENEM-2020) Um jogo pedagógico é formado por cartas nas quais está impressa uma fração em uma de suas faces. Cada jogador recebe quatro cartas e, vence aquele que primeiro consegue ordenar crescentemente suas cartas pelas respectivas frações impressas. O vencedor foi o aluno que recebeu as cartas com as frações: $\frac{3}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}$ e $\frac{5}{9}$.

A ordem que esse aluno apresentou foi:

a) $\frac{1}{4}, \frac{5}{9}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{9}$ c) $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$ d) $\frac{5}{9}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$ e) $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{4}, \frac{5}{9}$

Resolução: a ordem correta dos cartões é a alternativa a). Pode-se resolver transformando as frações em decimais, ou frações equivalentes.

2- (ENEM-2011) Uma agência de viagens de São Paulo (SP) está organizando um pacote turístico com destino à cidade de Foz do Iguaçu (PR) e fretou um avião com 120 lugares. Do total de lugares, reservou $\frac{2}{5}$ das vagas para as pessoas que residem na capital do estado de São Paulo, $\frac{3}{8}$ para as que moram no interior desse estado e o restante para as que residem fora dele. Quantas vagas estão reservadas no avião para as pessoas que moram fora do estado de São Paulo?

a) 27 b) 40 c) 45 d) 74 e) 81

Resolução: primeiro devemos calcular $\frac{2}{5}\ de\ 120 = 48$ depois $\frac{3}{8}\ de\ 120 = 45$, por fim basta diminuir 48+45 de 120=27, alternativa a).

3- (ENEM-2013) Em um certo teatro, as poltronas são divididas em setores. A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas as claras não foram vendidas. A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é:

a) $\frac{17}{70}$ d) $\frac{53}{17}$ b) $\frac{17}{53}$ e) $\frac{70}{17}$ c) $\frac{53}{70}$

Resolução: primeiramente devemos contar o total de poltronas que é 70, e depois as cadeiras que estão reservadas que é 17, e por fim escrevemos a razão entre eles: $\frac{17}{70}$.

4- (ENEM-2010) Grandes times nacionais e internacionais utilizam dados estatísticos para a definição do time que sairá jogando numa partida. Por exemplo, nos últimos treinos, dos chutes a gol feito pelo jogador I, ele converteu 45 chutes em gol. Enquanto isso, o jogador II acertou 50 gols. Quem deve ser selecionado para estar no time no próximo jogo, já que os dois jogam na mesma posição? A decisão parece simples, porém deve-se levar em conta quantos chutes a gol cada um teve oportunidade de executar. Se o jogador I chutou 60 bolas a gol e o jogador II chutou 75, quem deveria ser escolhido?

a) O jogador I, porque acertou $\frac{3}{4}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{3}$ dos chutes.

b) O jogador I, porque acertou $\frac{4}{3}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{3}$ dos chutes.

c) O jogador I, porque acertou $\frac{3}{4}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{3}{2}$ dos chutes.

d) O jogador I, porque acertou $\frac{12}{25}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{3}$ dos chutes.

e) O jogador I, porque acertou $\frac{9}{25}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{5}$ dos chutes.

Resolução: primeiro devemos escrever a razão entre o número de chutes ao gol e o número de acertos de cada jogador. Jogador 1: $\frac{45}{60}$, jogador 2 $\frac{50}{70}$. Para melhor analisar, obter frações equivalentes, $\frac{45}{60} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ ou seja a razão entre o número de chutes e o número de acertos do jogador 1 é $\frac{3}{4}$. Analogamente para o jogador 2 $\frac{50}{75} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$, ou seja, a razão entre o número de chutes e o número de acertos do jogador 2 é $\frac{2}{3}$. Observamos que $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$, para melhor ver podemos usar frações equivalentes $\frac{9}{12} > \frac{8}{12}$, assim o jogador escolhido deve ser o jogador 1.

5- (ENEM-2013) Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes. Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1500 telhas ou 1200 tijolos. Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados a carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

a) 300 tijolos. b) 360 tijolos. c) 400 tijolos. d) 480 tijolos. e) 600 tijolos.

Resolução: primeiramente sabemos que 1500 telhas é uma carga máxima para o caminhão, como o caminhão já está carregado com 900 telhas, sobra o peso proporcional a 600 telhas para ser preenchido com tijolos. Podemos encontrar esse valor da seguinte forma: $\frac{1200}{1500} = \frac{a}{600} = 480$, ou seja, 480 tijolos possuem o peso proporcional a 600 telhas.

6- (ENEM-2018) O presidente de uma empresa, com o objetivo de renovar sua frota de automóveis, solicitou uma pesquisa medindo o consumo de combustível de 5 modelos de carro que usam o mesmo tipo de combustível. O resultado foi:

- Carro I: deslocamento de 195 km consumindo 20 litros de combustível;
- Carro II: deslocamento de 96 km consumindo 12 litros de combustível;
- Carro III: deslocamento de 145 km consumindo 16 litros de combustível;
- Carro IV: deslocamento de 225 km consumindo 24 litros de combustível;
- Carro V: deslocamento de 65 km consumindo 8 litros de combustível.

Para renovar a frota com o modelo mais econômico, em relação à razão quilômetro rodado por litro, devem ser comprados carros do modelo

a) I b) II c) III d) IV e) V

Resolução: devemos calcular a razão $\frac{quilômetro\ rodado}{litro}$ de cada carro. Carro I$\frac{195}{20} = 9{,}75.$ Carro II $\frac{96}{12} = 8.$ Carro III$\frac{145}{16} = 9{,}06.$ Carro IV $\frac{225}{24} = 9{,}37.$ Carro V $\frac{65}{8} = 8{,}12.$ Assim o carro mais econômico é o carro I.

7- (ENEM-2018) Um mapa é a representação reduzida e simplificada de uma localidade. Essa redução, que é feita com o uso de uma escala, mantém a proporção do espaço representado em relação ao espaço real. Certo mapa tem escala 1 : 58 000.

Considere que, nesse mapa, o segmento de reta que liga o navio à marca do tesouro meça 7,6 cm. A medida real, em quilômetro, desse segmento de reta é:

a) 4 408 b) 7 632 c) 44 080 d) 76 316 e) 440 800

Resolução: temos a proporção 1:58000, devemos determinar a medida real do segmento representado no mapa, $\frac{1}{58000} = \frac{7{,}6}{x} = 440800$ alternativa e).

8- (ENEM-2010) As Olimpíadas de 2016 serão realizadas na cidade do Rio de Janeiro. Uma das modalidades que trazem esperanças de medalhas para o Brasil é a natação. Aliás, a piscina olímpica merece uma atenção especial devido as suas dimensões. Piscinas olímpicas têm 50 metros de comprimento por 25 metros de largura. Se a piscina olímpica fosse representada em uma escala de 1:100, ela ficaria com as medidas de

a) 0,5 centímetro de comprimento e 0,25 centímetro de largura.

b) 5 centímetros de comprimento e 2,5 centímetros de largura.

c) 50 centímetros de comprimento e 25 centímetros de largura.

d) 500 centímetros de comprimento e 250 centímetros de largura.

e) 200 centímetros de comprimento e 400 centímetros de largura

Resolução: utilizaremos proporção para resolver esse problema. 50 m=5000cm na escala teríamos $\frac{1}{100} = \frac{x}{5000} = 50cm$. Para a piscina de 25m=2500cm na escala teríamos $\frac{1}{100} = \frac{x}{2500} = 25cm$.

6. ENCONTRO 2.

6.1. PLANO DE AULA 2 - 12/03/2022.

Conteúdo: Radiciação e Potenciação.

Público-alvo: 3° série do ensino médio.

Objetivo geral: Compreender e operar potenciação e radiciação de números reais.

Objetivos específicos:

- Construir o conceito de potenciação com diferentes expoentes;
- Compreender a potenciação de números reais como uma multiplicação de fatores iguais e a radiciação como sua operação inversa;

- Efetuar cálculos com números reais, incluindo potências e raízes, fazendo uso de suas propriedades.

Tempo de execução: 3 horas e 40 minutos.

Recursos didáticos: quadro, giz, apagador, material impresso e jogo floral impresso.

Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos a aula retomando a lista de exercício do encontro anterior, perguntaremos se tiveram alguma dúvida ou dificuldade durante a resolução. Caso haja dúvidas procuraremos saná-las, caso contrário faremos uma breve conferência das respostas, solicitando que os alunos mostrem suas soluções. **(15 min)**

Logo após vamos iniciar o conteúdo de potenciação por meio de um problema.

Problema 1. Atenção para as condições de participação! Uma delas diz que, para estar concorrendo, é necessário compartilhar a publicação e marcar três amigos. Ao saber da promoção, uma pessoa compartilhou com três amigos. Estes três também a compartilharam, cada um com mais três amigos. E esses novos amigos também a compartilharam, cada um com mais três amigos. Após esses compartilhamentos, quantas pessoas saberão da promoção? Façam uma representação para a situação, em seguida expliquem as estratégias que utilizaram.

Figura 6 sorteio

Fonte: https://emprelas.com/promocoes-e-sorteios-para-redes-sociais.

Solicitaremos que os grupos façam uma leitura individual e que pensem em maneiras de solucionar o problema, ficaremos à disposição para eventuais dúvidas. **(15min)**

Depois indagaremos aos alunos a respeito das estratégias e das representações que utilizaram para resolver o problema. Em seguida seguiremos para um momento de história da matemática. **(10min)**

“Historiando”

Os relatos mais antigos sobre operações utilizando potências remontam aos egípcios, cerca de 2000 a.C. (antes de Cristo). Os babilônios também possuíam conhecimento sobre o tema, o que pode ser conferido em uma antiga tábua de argila conhecida como tabuinha de Larsa. O início do uso do termo “potência” em matemática é atribuído ao filósofo grego Hipócrates. Ele chamou o quadrado de um segmento de *dynamis*, palavra grega que em português significa potência.

Figura 7 historiando

Fonte: www.sxc.hu

Após a história, abordaremos algumas propriedades de potenciação através de uma atividade de verdadeiro ou falso. Explicaremos o que é um contraexemplo e sua importância na matemática.

Propriedades de potenciação.

Determine quais das seguintes sentenças são verdadeiras e quais são falsas. Em cada item falso, indique um contraexemplo para a afirmação.

a) $a^n b^n = (a.b)^n$

b) $a^{-n} = -a^{\,n}$.

c) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$.

d) $((a)^n)^m = a^{n.m}$.

e) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

f) $a^n * a^m = a^{n+m}$

g) $a^0 = 1$

h) $a^{n+m} = a^n + a^m$

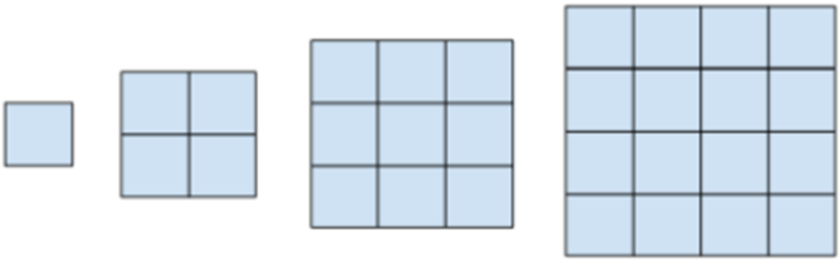
(20-25min)

Radiciação:

Introduziremos radiciação utilizando a ideia de lado de um quadrado, para isso apresentaremos a imagem a seguir e uma sequência de questionamentos com o objetivo de levar o aluno a usar a radiciação.

Paulo observa uma sequência de quadrados colocados em ordem crescente como mostra a figura abaixo:

Figura 8 sequência de quadrados



Fonte: https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/8ano/matematica/multiplicacao-de-fatores-iguais-e-raiz-quadrada/271

Ele observou uma regularidade entre o total de ladrilhos do quadrado e o comprimento do lado. Que regularidade ele obervou?

Paulo imaginou um quadrado com 225 ladrilhos, neste caso, qual é a medida do comprimento do lado desse quadrado? Como você chegou a esse resultado?

(5-10min)

Deixaremos um tempo para que os alunos pensem, esperamos que já tenham um conheciemento sobre radiciação, então acreditamos que não haverá grandes dificuldades na execução. Depois vamos abordar o conteúdo de radiciação e suas propriedades.

A radiciação é a operação inversa da potenciação. Podemos escrever como:

$$\sqrt[n]{a} = b$$

$\sqrt[n]{a}$ raiz enésima de a.

$\sqrt{}$ radical.

n índice da raiz.

a= radicando.

b= raiz.

Como você faria para determinar as raizes a seguir?

$\sqrt{16} =$ $\sqrt{81} =$ $\sqrt{225} =$ $\sqrt{625} =$ $\sqrt{729} =$

Ao resolver as radiciações propostas acima buscaremos abordar a decomposição em fatores primos como método de resolução. **(10-20min)**

Após esse momento abordaremos as propriedades de radiciação, no decorrer das decomposições no exercício anterior, faremos o uso de algumas propriedades mesmo antes de anunciá-las. Para dar início as propriedades, induziremos que os próprios alunos percebam regularidades, quando conveniente. Após cada exercício questionaremos os alunos sobre o que eles perceberam, e em seguida falaremos sobre a propriedade que é envolvida.

1) Resolva as seguintes raízes:

$\sqrt{\mathbf{4^2}}$ $\sqrt{\mathbf{6^2}}$ $\sqrt[3]{\mathbf{2^3}}$ $\sqrt[4]{\mathbf{3^4}}$ $\sqrt[n]{\mathbf{4^n}}$

Propriedade 1.

A raiz enésima de um número elevado a n é igual a esse mesmo número.

2) Resolva as seguintes raízes:

$\sqrt{\sqrt{\mathbf{16}}}$ $\sqrt{\sqrt[3]{\mathbf{64}}}$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}} = \sqrt[m.n]{\boldsymbol{a}}$

Propriedade 2.

Raiz de outra raiz. Basta conservar o radicando e multiplicar os índices das raízes.

3) Resolva as seguintes operações.

$5^{\frac{2}{3}} =$ $2^{\frac{2}{3}} =$ $7^{\frac{3}{4}} =$ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Propriedade 3.

Potência de expoente radical. O numerador da fração passa a ser o expoente do radicando, e o denominador passa a ser o índice da raiz.

4) Resolva as operações a seguir.

$\sqrt{3}.\sqrt{3} =$ $\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{9} =$ $\sqrt[3]{34}\sqrt[3]{2} =$ $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$

Propriedade 4.

Produto de raízes com índices iguais. O produto entre duas raízes com índices iguais é igual à raiz de mesmo índice do produto dos radicandos.

5) Resolva as radiciações a seguir.

$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} =$ $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{9}} =$ $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}} =$ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Propriedade 5.

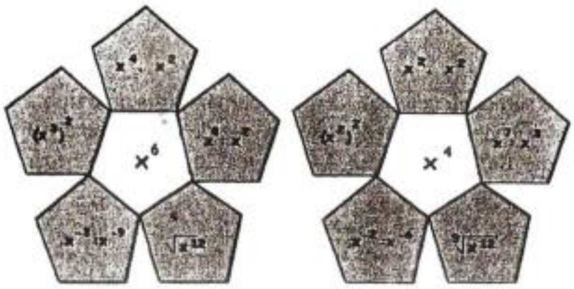
Quociente de raízes com índices iguais. A divisão entre duas raízes de índices iguais é igual à raiz de mesmo índice da divisão dos quocientes.

(20-25min)

Por fim, vamos propor um jogo chamado "Potenciação floral”.

Como jogar: os alunos estarão divididos em grupos, cada integrante do grupo receberá “um miolo” e “cinco pétalas” da flor. A ordem do jogo será por meio de “dois ou um”. As pétalas estarão dispostas no centro da mesa, e cada aluno terá seu “miolo”, na sua vez deverá virar uma das pétalas e verificar se serve no seu jogo, caso sirva começará a montar sua flor, caso não sirva deixará virada na mesa e o aluno a sua direita continua. O objetivo do jogo é encaixar as pétalas nos miolos de maneira correta. Quando completar sua flor, deverá parar de virar as pétalas, e esperar que os demais jogadores montem sua flor. Como demonstrado na figura abaixo.

Figura 9 jogo floral



Outras flores:
miolo: x^2 **pétalas:** $x^5 \cdot x^{-3}$; $x^{-4} : x^{-6}$; $(x^4)^{1/2}$; $\sqrt[4]{x^8}$; $x^7 : x^5$
miolo: x^8 **pétalas:** $x^5 \cdot x^3$; $x^{10} : x^2$; $x^{-1} : x^{-9}$; $(x^4)^2$; x^{2^3}
miolo: x **pétalas:** $x^5 \cdot x^{-4}$; $x^4 : x^3$; $(x^3)^{1/3}$; $x^2 \cdot x \cdot x^{-2}$; $\sqrt[3]{x^3}$
miolo: x^3 **pétalas:** $x^6 \cdot x^{-3}$; $x^7 : x^4$; $x^{-2} : x^{-5}$; $(x^6)^{1/2}$; $\sqrt[3]{x^9}$

Fonte: 1Fonte: TCC_taynara_oliveira.pdf

(20-30min)

Após concluirmos o jogo, solucionaremos juntamente com a turma os exercícios propostos na lista entregue no início da aula. Com o objetivo de abordar os conjuntos numéricos. Relacionaremos com o conteúdo abordado até o momento, observando as soluções encontradas e a qual conjunto numérico pertencem. Exploraremos situações nas quais há a necessidade de expandirmos os conjuntos, a fim de atender a existência da operação de radiciação. **(60min)**

Avaliação: A avaliação será realizada de maneira contínua, observando a participação dos alunos durante o desenvolvimento da aula. Avaliaremos também o desenvolvimento do jogo e a resolução da lista proposta.

Referências:

DEFINIÇÃO DE POTENCIAÇÃO. Disponível em: https://www.matematicadidatica.com.br/Potenciacao.aspx. Acesso em: 05 jan. 2022.

EXERCÍCIO SOBRE RADICIAÇÃO. Disponível em: https://beduka.com/blog/exercicios/matematica-exercicios/exercicios-sobre-radiciacao/. Acessado em: 29 jan. 2022.

IMENES, Luiz. LELLIS, Marcelo. **Matemática 7**. São Paulo: Scipione,1998.

OBMEP POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=12&tipo=4. Acesso em: 05 jan.2022.

QUESTÕES DE VESTIBULAR SOBRE POTENCIAÇÃO. Disponível em:http://tudodeconcursosevestibulares.blogspot.com/2012/12/questoes-de-vestibular-potenciacao.html. Acessado em: 29 jan. 2022.

QUESTÕES DO ENEM SOBRE POTENCIAÇÃO. Disponível em: https://www.qconcursos.com/questoes-do-enem/questoes?discipline_ids%5B%5D=13&subject_ids%5B%5D=20295. Acessado em: 05 jan.2022.

HARTMANN, Ângela Maria; ROSA, Taynara. **Potenciação e radiciação**: contribuições dos jogos no ensino médio. Universidade Federal do Pampa. Caçapava do Sul, 2016. Disponível em: https://periodicos.unipampa.edu.br/index.php/SIEPE/article/view/90834. Acessado em: 09 mar. 2022.

6.2. RELATÓRIO AULA 2.

Aos doze dias do mês de março do ano de 2022, realizamos o segundo encontro do Promat – Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – Unioeste, no bloco A, sala 104. Nesse encontro, os conteúdos abordados foram potenciação e radiciação. Antes da chegada dos alunos, deixamos a sala organizada com 6 grupos de 4 carteiras cada.

Iniciamos o segundo encontro pontualmente às 8h. Recepcionamos os alunos, e sugerimos que se reunissem nos mesmos grupos da semana anterior. Havia alunos que não estavam presentes no primeiro encontro, sendo assim os agrupamos juntos e lhes entregamos uma lista contendo exercícios, problemas e um breve resumo do conteúdo anterior. Estamos com um grupo de alunos bem diversificado, há muitos que ainda estão cursando o primeiro ano do ensino médio e, um que já é graduado e buscou o curso para auxiliá-lo na realização de vestibular em outra área.

Após o momento inicial, retomamos a lista que foi deixada ao fim do primeiro encontro. Realizamos a correção dos exercícios no quadro, sempre solicitando a participação dos alunos. Durante a correção do exercício cinco, que abordava razão e proporção entre o peso máximo da carga de um caminhão, um dos participantes apresentou uma resolução completamente diferente da que havíamos pensado inicialmente. Ele nos explicou seu raciocínio envolvendo números percentuais; quando fomos até ele para melhor entender sua resolução ele disse que poderia nos explicar, mas que não sabia escrever “matematicamente”.

Em seguida iniciamos o que foi planejado para o segundo encontro, apresentando o problema um, que abordava um sorteio de rede social; depois de uma leitura coletiva deixamos tempo para que cada grupo pensasse em uma solução. O objetivo do problema era introduzir o conteúdo de potenciação, e durante o tempo proporcionado, observamos a resolução dos grupos e percebemos que a maioria relacionou às potências. No entanto notamos que poucos grupos pensaram em somar as pessoas resultantes a cada etapa de compartilhamento. Alguns questionamentos do tipo: “devemos parar em 3^4 ou 3^3?”; “é só multiplicarmos 3.3?”; “antes do primeiro compartilhamento uma pessoa já sabia, o 3^0=1”, surgiram no interior dos grupos e, conseguimos acompanhar de perto a forma como eles pensavam para chegar a um consenso. Houve algumas participações enquanto resolvíamos na lousa, e, de maneira geral, temos uma turma bem participativa.

Em sequência, sugerimos que os alunos pensassem em uma resolução para o problema dois da lista de exercício, explicamos que eles poderiam utilizar exemplos numéricos para auxiliar a determinação da veracidade ou falsidade de cada sentença. Ao horário determinado os alunos saíram para o intervalo de vinte minutos e, ao retornarem, realizamos a correção do problema proposto anteriormente.

Construímos juntamente com os alunos a ideia da radiciação como sendo encontrar ou obter o lado de um quadrado. Eles participaram ativamente da construção sempre respondendo aos questionamentos feitos. Um dos alunos é muito ágil e realiza o cálculo mental muito rápido, conseguia calcular raízes com facilidade então estava sempre respondendo às perguntas imediatamente. O mesmo aluno levantou o questionamento de como calculávamos raízes não exatas, como por exemplo $\sqrt{27}$. A partir de seu questionamento explicamos a fatoração dos números e, como determinamos raízes utilizando esse processo. A correção da lista do encontro anterior levou mais tempo do que estava previsto no planejamento, então precisamos realizar ajustes no plano de aula desse encontro, deixando as propriedades de radiciação para serem trabalhadas durante a resolução da lista de exercícios.

Iniciamos a execução do “Jogo Floral” que foi retirado de um projeto de regência que encontramos durante nossas pesquisas, explicando-lhes a maneira de jogar. Fizemos uma rodada como exemplo, no quadro, para que todos pudessem ver; explicamos a eles que cada pétala encaixaria corretamente em um miolo, depois distribuímos as cartas destinadas à cada grupo. As estratégias abordadas foram diferentes entre si, um grupo optou por trabalhar com exemplos numéricos então onde tinham os “x” nas cartas eles substituíram por números naturais. Uma das cartas abordava uma das propriedades de radiciação, no entanto, um grupo trabalhou com fatoração e conseguiu uma estratégia de resolução, sem usar nenhuma propriedade. O objetivo do jogo era encaixar todas as pétalas completando a flor corretamente, o tempo de execução do jogo foi o previsto no plano de aula. Nos últimos vinte minutos da aula sugerimos que retomassem a lista e trabalhassem em sua resolução, circulamos pelos grupos sempre auxiliando quando necessário. Nesse momento realizamos a chamada totalizando 24 alunos presentes. Às 11h 40min, dispensamos todos os alunos, e reorganizamos as carteiras da sala novamente em filas.

6.3. MATERIAL ENTREGUE.

Lista de exercícios potenciação e radiciação.

Problema 1. Atenção para as condições de participação! Uma delas diz que, para estar concorrendo, é necessário compartilhar a publicação e marcar três amigos. Ao saber da promoção, uma pessoa compartilhou com três amigos. Estes três também a compartilharam, cada um com mais três amigos. E esses novos amigos também a compartilharam, cada um com mais três amigos. Após esses compartilhamentos, quantas pessoas saberão da promoção? Façam uma representação para a situação, em seguida expliquem as estratégias que utilizaram.

Figura 10 sorteio lista

Fonte: https://emprelas.com/promocoes-e-sorteios-para-redes-sociais.

Problema 2: Determine quais das seguintes sentenças são verdadeiras e quais são falsas. Em cada item falso, indique um contraexemplo para a afirmação.

a) $a^n b^n = (a.b)^n$

b) $a^{-n} = -a^{\,n}$.

c) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$.

d) $((a)^n)^m = a^{n.m}$.

e) $(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n$

f) $a^n * a^m = a^{n+m}$

g) $a^0 = 1$

h) $a^{n+m} = a^n + a^m$

1- (FATEC- Faculdade de Tecnologia de São Bernardo do Campo) Das três sentenças abaixo:

I. $2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3$ II. $(25)^x = ((5)^2)^x$ III. $2^x + 3^x = 5^x$

a) somente a I é verdadeira;

b) somente a II é verdadeira;

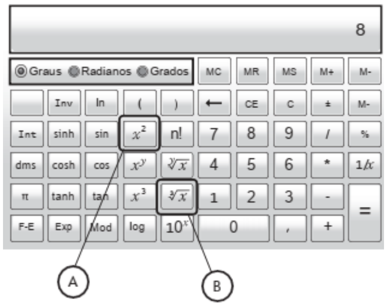
c) somente a III é verdadeira;

d) somente a III é falsa.

2- (ENEM-2021) A imagem representa uma calculadora científica com duas teclas destacadas. A tecla A eleva ao quadrado o número que está no visor da calculadora, e a tecla B extrai a raiz cúbica do número apresentado no visor.

Uma pessoa digitou o número 8 na calculadora e em seguida apertou três vezes a tecla A e depois uma vez a tecla B. A expressão que representa corretamente o cálculo efetuado na calculadora é:

Figura 11 calculadora



Fonte: 2 ENEM 2012

a) $\sqrt{8^{3+3+3}}$ b) $\sqrt[3]{8^{2x2x2}}$ c) $\sqrt{8^3+8^3+8^3}$ d) $\sqrt[3]{8^2+8^2+8^2}$ e) $\sqrt[3]{8^2x8^2x8^2}$

3- (ENEM- 2015) As exportações de soja do Brasil totalizaram 4,129 milhões de toneladas no mês de julho de 2012, e registraram um aumento em relação ao mês de julho de 2011, embora tenha havido uma baixa em relação ao mês de maio de 2012. Disponível em: www.noticiasagricolas.com.br. Acesso em: 2 ago. 2012. A quantidade, em quilogramas, de soja exportada pelo Brasil no mês de julho de 2012 foi de:

a) 4,129 X 10^3 c) 4,129 X 10^9 e) 4,129 X 10^{15}

b) 4,129 X 10^6 d) 4,129 X 10^{12}

4- (Mack) O valor de √2 + √3.√18 é igual a:

a) √56. c) √2 + 54. e) √2.(1 + 3.√3).

b) √108. d) √6 + 6.

5- (UTF – PR) Considere as seguintes expressões:

I. $\frac{3\sqrt{12}}{2} = 3\sqrt{2}$ II. $(2\sqrt{3})^{-1} = \frac{3}{\sqrt{6}}$ III. $(2^4)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$

É (são) verdadeira(s), somente:

a) I. c) III. e) I e III.

b) II. d) I e II.

6- (CEFET/RJ – 2014) Por qual número devemos multiplicar o número 0,75 de modo que a raiz quadrada do produto obtido seja igual a 45?

a) 2700. **c)** 2900. **b)** 2800. **d)** 3000.

7-(OBMEP) Quantos dos números abaixo são maiores que 10?

I) 3 √ 11 II) 4 √ 7 III)5 √ 5 IV) 6 √ 3 V) 7 √ 2.

(a) I (b) II (c) III (d) IV (e) V

8- (OBMEP) Utilizando a calculadora podemos obter que √ 2 = 1, 4142135623730950488016887242097... Agora, também utilizando uma calculadora, calcule os valores abaixo, faça os registros e observe como o resultado se aproxima cada vez mais do número 2.

a) $1{,}42^2$ = b) $1{,}412^2$ = c) $1{,}4142^2$ = d) $1{,}41422^2$ =

9- Quantos números inteiros positivos existem entre √ 8 e √ 80?

6.4. RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS.

Resolução dos exercícios propostos em sala de aula

Problema 1. Atenção para as condições de participação! Uma delas diz que, para estar concorrendo, é necessário compartilhar a publicação e marcar três amigos. Ao saber da promoção, uma pessoa compartilhou com três amigos. Estes três também a compartilharam, cada um com mais três amigos. E esses novos amigos também a compartilharam, cada um com mais três amigos. Após esses compartilhamentos, quantas pessoas saberão da promoção? Façam uma representação para a situação, em seguida expliquem as estratégias que utilizaram.

Resolução:

1°compartilhamento: 1 pessoa sabia e compartilhou com mais 3, assim 4 pessoas sabiam da promoção.

2°compartilhamento: 3 pessoas compartilharam com mais 3 pessoas cada, mais 9 pessoas ficaram sabendo da promoção: 4+9=13

3°compartilhamento: as 9 pessoas compartilharam com mais três pessoas cada, assim mais 27 pessoas sabiam da promoção: 27+13=40

Na forma de potência:

Antes do primeiro compartilhamento: $3^0=1$

1° compartilhamento: $3^1=3$

2° compartilhamento: $3^2=9$

3° compartilhamento: $3^3=27$

Soma de todas as pessoas: 1+3+9+27=40

Problema 2: Determine quais das seguintes sentenças são verdadeiras e quais são falsas. Em cada item falso, indique um contraexemplo para a afirmação.

a) $a^n b^n = (a.b)^n$

b) $a^{-n} = -a^{\ n}$.

c) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$.

d) $((a)^n)^m = a^{n.m}$.

e) $(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n$

f) $a^n * a^m = a^{n+m}$

g) $a^0 = 1$

h) $a^{n+m} = a^n + a^m$

1- (FATEC- Faculdade de Tecnologia de São Bernardo do Campo) Das três sentenças abaixo:

I. $2^{x+3} = 2^x.2^3$ II. $5^{2x} = (5^2)^x$ III. $2^x + 3^x = 5^x$

a) somente a I é verdadeira;
c) somente a III é verdadeira;
b) somente a II é verdadeira;
d) somente a III é falsa.

Resolução: I é verdadeira, propriedade de potência, multiplicação de bases iguais, conserva-se a base e soma os expoentes.

II é verdadeira, pois pela propriedade de potência podemos realizar a multiplicação dos expoentes.

III é falsa. Tome x=2, assim temos: $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 \neq 5^2$. Alternativa d).

2- (ENEM-2021) A imagem representa uma calculadora científica com duas teclas destacadas. A tecla A eleva ao quadrado o número que está no visor da calculadora, e a tecla B extrai a raiz cúbica do número apresentado no visor.

Uma pessoa digitou o número 8 na calculadora e em seguida apertou três vezes a tecla A e depois uma vez a tecla B. A expressão que representa corretamente o cálculo efetuado na calculadora é

a) $\sqrt{8^{3+3+3}}$ b) $\sqrt[3]{8^{2x2x2}}$ c) $\sqrt{8^3 + 8^3 + 8^3}$ d) $\sqrt[3]{8^2 + 8^2 + 8^2}$ e) $\sqrt[3]{8^2 x 8^2 x 8^2}$

Resolução: $[(8^2)^2]^2 = 8^8$ a tecla A apertada três vezes resultará nessa expressão pôr fim a tecla B extrairá a raiz cúbica resultando em: $\sqrt[3]{8^8} = \sqrt[3]{8^{2x2x2}}$ alternativa b).

3- (ENEM- 2015) As exportações de soja do Brasil totalizaram 4,129 milhões de toneladas no mês de julho de 2012, e registraram um aumento em relação ao mês de julho de 2011, embora tenha havido uma baixa em relação ao mês de maio de 2012. Disponível em: www.noticiasagricolas.com.br. Acesso em: 2 ago. 2012.

A quantidade, em quilogramas, de soja exportada pelo Brasil no mês de julho de 2012 foi de:

a) 4,129 X 10^3 c) 4,129 X 10^9 e) 4,129 X 10^{15}

b) 4,129 X 10^6 d) 4,129 X 10^{12}

Resolução: 1 tonelada equivale à 1000kg. 4,126 milhões de tonelada em notação científica é 4 129 000 = 4,126 x 10^6, para passar de toneladas para kg multiplicamos por 10^3, resultando em 4,129 x 10^9 alternativa d).

4- (Mack) O valor de √2 + √3 .√18 é igual a:

a) √56. c) √2 + 54. e) √2. (1 + 3.√3).

b) √108. d) √6 + 6.

Resolução: $\sqrt{2}+\sqrt{3}\sqrt{18}=\sqrt{2}+\sqrt{3.18}=\sqrt{2}+\sqrt{54}=\sqrt{2}+\sqrt{6.9}=\sqrt{2}+3\sqrt{6}=\sqrt{2}+3.\sqrt{2.3}=\sqrt{2}+3.\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{2}(1+3\sqrt{2})$ alternativa e).

5- <u>(UTF – PR)</u> Considere as seguintes expressões:

I. $\frac{3\sqrt{12}}{2}=3\sqrt{2}$ II. $(2\sqrt{3})^{-1}=\frac{3}{\sqrt{6}}$ III.$(2^4)^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$

É (são) verdadeira(s), somente:

a) I. c) III. e) I e III.

b) II. d) I e II.

Resolução: I. $\frac{3\sqrt{12}}{2}=\frac{3\sqrt{4.3}}{2}=\frac{3.\sqrt{4}\sqrt{3}}{2}=\frac{3.2.\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$. Falsa.

II. $(2\sqrt{3})^{-1}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{1.2\sqrt{3}}{(2\sqrt{3}).(2\sqrt{3})}=\frac{2\sqrt{3}}{(2\sqrt{3})^2}=\frac{2\sqrt{3}}{2^2.(\sqrt{3})^2}=\frac{2\sqrt{3}}{4.3}=\frac{2\sqrt{3}}{12}=\frac{\sqrt{3}}{6}$. Verdadeira.

III. $(2^4)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2^4}=\sqrt{16}=4$. Falsa. Alternativa b).

6- (<u>CEFET/RJ – 2014</u>) Por qual número devemos multiplicar o número 0,75 de modo que a raiz quadrada do produto obtido seja igual a 45?

a) 2700. c) 2900.

b) 2800. d) 3000.

Resolução: $0{,}75.x=y\ \ e\sqrt{y}=45$ desta informação segue que: $y=45^2=y=2025$, substituindo temos $0{,}75.x=2025=x=\frac{2025}{0{,}75}=x=2700$. Alternativa a).

7- (OBMEP) Quantos dos números abaixo são maiores que 10?

I) 3 √ 11 II) 4 √ 7 III)5 √ 5 IV) 6 √ 3 V) 7 √ 2.

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Resolução: I) $3\sqrt{11} = 9{,}94 < 10$, II) $4\sqrt{7} = 10{,}58 > 10$, III) $5\sqrt{5} = 11{,}18 > 10$, IV) $6\sqrt{3} = 10{,}39 > 10$, V$7\sqrt{2} = 9{,}98 < 10$. Três números são maiores que 10, alternativa C).

8- (OBMEP) utilizando a calculadora podemos obter que √ 2 = 1, 4142135623730950488016887242097. Agora, também utilizando uma calculadora, calcule os valores abaixo, faça os registros e observe como o resultado se aproxima cada vez mais do número 2.

a) $1{,}41^2$ = b) $1{,}414^2$ = c) $1{,}4142^2$ = d) $1{,}41422^2$ =

Resolução: a) 1,9881 b) 1,999369 c) 1,99996164 d) 2,000018208

9- Quantos números inteiros positivos existem entre √ 8 e √ 80?

Resolução: $\sqrt{8} = 2{,}82$ não é inteiro, o primeiro inteiro depois é $\sqrt{9} = 3, \sqrt{80} = 8{,}94$ que não é inteiro, o último inteiro é $\sqrt{64} = 8.$ Assim há 6 inteiros entre $\sqrt{8}\ \ e\ \sqrt{80}$.

7. ENCONTRO 3.

7.1. PLANO DE AULA 3 – 19/03/2022.

Conteúdo: Polinômios; produtos notáveis e fatoração

Público-alvo: 3° série do Ensino Médio.

Objetivo geral: Compreender os processos de **fatoração** de expressões algébricas, com base em suas relações com os **produtos notáveis**, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau. Esse é o objetivo EF09MA09 da BNCC.

Objetivos específicos:

- Identificar monômios e polinômios e efetuar suas operações;
- Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis;
- Fatorar as expressões algébricas, utilizando termos em evidência, trinômio quadrado perfeito, agrupamento, diferença de dois quadrados e trinômio do 2º grau.

Tempo de execução: 3h e 40min.

Recursos didáticos: quadro, giz, apagador, material impresso, tesoura ou régua, papel em branco e jogo de dominó impresso.

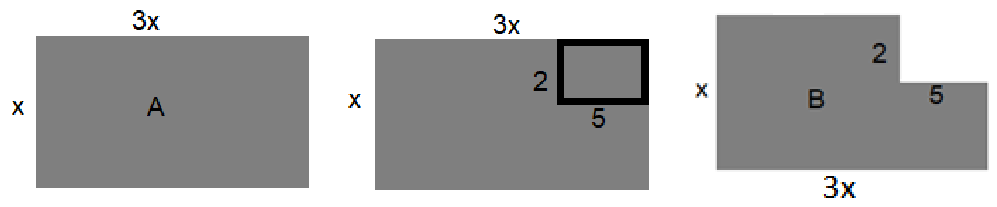
Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos o encontro retomando o que foi trabalhado no sábado anterior. Indagaremos se houve alguma dúvida da lista de exercícios, se há algum exercício ou problema que não conseguiram solucionar. Faremos uma conferência do gabarito com todos da sala. **(10 min)**

Após esse momento, para abordar o conteúdo de polinômios, disponibilizaremos a lista de problemas, com o problema a seguir e solicitaremos que os alunos o resolvam.

Problema 1: Ana Lúcia construiu uma região retangular A, cujo comprimento em centímetros mede o triplo da largura. Em seguida, tirou uma parte retangular de 5 cm por 2 cm. Observe as figuras e escreva, na forma mais simples possível, as expressões algébricas que indicam: o perímetro de A, o perímetro de B, a área de A e a área de B.

Figura 12 retângulos



Fonte: das autoras (2022).

(10 min)

Após investigar e discutir os caminhos que os alunos utilizaram para resolver o problema, exploraremos brevemente as ideias envolvendo monômios, binômios e trinômios, exemplificando cada um:

Monômio:	Binômio:	Trinômio:
a) $4x$	a) $2a + 3b^2$	a) $x^3 - 2x + 9$
b) $3a^2b$	b) $x + y$	b) $3ab - 4xy - 10y$
c) x^7y^3z	c) $2ab - 5cd^2$	c) $m^2n + 2m + n^4$

Na sequência definiremos polinômios e raiz de polinômio:

Polinômios: são expressões algébricas formadas por números (coeficientes) e letras (partes literais).

Raiz do polinômio: A raiz de um polinômio é denotada pelo valor que a variável assume de modo que o valor numérico do polinômio seja igual a zero.

(20 min)

E apresentaremos monômios semelhantes, como forma de introduzir soma de polinômios, retornando ao problema 1 para usá-lo como exemplo.

Monômios semelhantes: dois monômios são semelhantes se possuem partes literais iguais.

Colocaremos mais alguns no quadro para exemplificar:

a) $3xy - 4xy - 10xy$	b) $5a + 2a - 7a$	c) $x^3 - 8x^3 + 7\,x^3$
d) $m^2n + 2m^2n + 3a - 4a$	e) $3x + 2x - 3xy + 4xy$	f) $2x^4 - x + x^4$

Ainda explorando esses exemplos, trabalharemos a soma de polinômios, enfatizando que ela só pode ser realizada quando os monômios forem semelhantes, ou seja, quando tiverem a mesma parte literal. Logo, trabalharemos adição e subtração de polinômios alternando a resolução das questões entre nós e os alunos. **(15 min)**

Na sequência, abordaremos a multiplicação de polinômios:

Para multiplicar polinômios, usamos a propriedade distributiva, ou seja, multiplicaremos termo a termo. Exemplos:

a) $(4xy - 10xy - y) \cdot (2x)$ b) $(b + 3a) \cdot (5a + 2a)$

c) $(m^2n + 3a - 4a) \cdot (2n + 3)$

Resolveremos as letras a) e b) e pediremos se algum aluno quer resolver a letra c) no quadro, dizendo que os colegas podem ajudá-lo na resolução, de forma oral. Caso ninguém se sentir confortável em realizar a tarefa, deixaremos que os alunos a façam no caderno e, circularemos pela sala para tirar possíveis dúvidas. **(10 min)**

E então nos deteremos na divisão de polinômios, iniciando com um exemplo numérico para relembrar o algoritmo euclidiano da divisão:

Para dividir polinômios, utilizamos o método da divisão euclidiana. Primeiramente realizamos a divisão entre os coeficientes numéricos e depois a divisão de potências de mesma base. Exemplos:

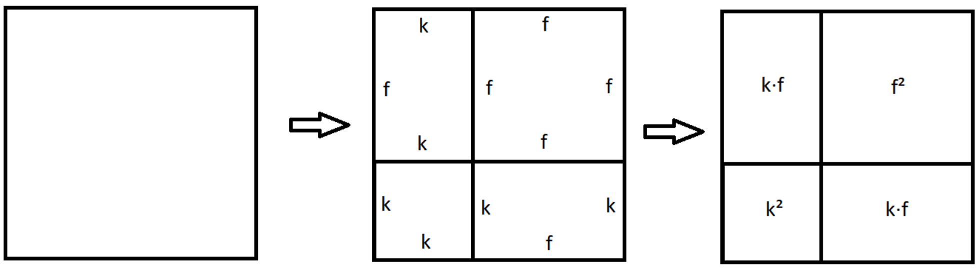
a) $1347 \div 3$ b) $(3x^3 - 14x^2 + 23x - 10) \div (x^2 - 4x + 5)$

c) $(15x^2 + 11x + 2) \div (3x + 1)$ d) $(x^3 + 7x^2 + 15x + 9) \div (x + 1)$

Também resolveremos as letras a), b) e c) e faremos a mesma dinâmica do exercício anterior com a letra d). **(10 min)**

Em seguida, trabalharemos com os produtos notáveis. Iniciaremos com o Quadrado da soma. Entregaremos aos alunos um quadrado de papel já recortado e pediremos que eles dividam o lado desse quadrado em duas partes quaisquer. Em seguida solicitaremos que tracem uma paralela ao outro lado passando pelo ponto da divisão. Pediremos que repitam com o outro lado do quadrado o mesmo processo, mas usando a mesma medida escolhida para o lado anterior. Na sequência, solicitaremos que nomeiem de forma genérica as medidas dos lados dos polígonos nos quais o quadrado foi dividido. Posteriormente pediremos que anotem a área de cada polígono e, escrevam no caderno a área total, somando as áreas de cada um dos polígonos. Para facilitar a compreensão solicitaremos que recortem as figuras.

Figura 13 quadrados.



Fonte: Produção das autoras (2022)

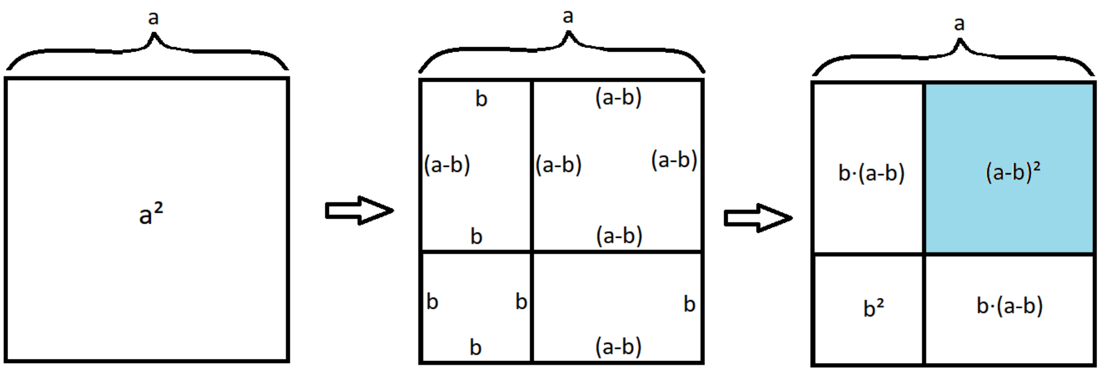
Então, faremos a interpretação da área, considerando as medidas dos lados com o quadrado original, como por exemplo na imagem, $k + f$. Portanto teremos a área sendo $(k+f)^2$, então iremos resolver esse quadrado com a multiplicação de polinômios: $(k+f)^2 = (k+f)(k+f) = k^2 + kf + fk + f^2 = k^2 + 2kf + f^2$. Nesse ponto relembraremos que a ordem dos fatores não altera o produto. Retomaremos com as figuras cortadas para relacionar as duas formas de encontrar a área do quadrado. Posteriormente pediremos se eles encontraram algum padrão para aplicar sempre que tiverem um quadrado cujo lado é composto por dois termos. Então enunciaremos que o Quadrado da Soma corresponde a:

Quadrado da soma: um quadrado cujo lado é o primeiro termo, mais dois retângulos cuja área é o produto dos dois termos, mais um outro quadrado cujo lado é o segundo termo.

(15-20 min)

Posteriormente trabalharemos com o Quadrado da diferença. Usaremos a construção análoga ao Quadrado da soma, e pediremos que usem outra notação para nomear os lados do quadrado, como no exemplo da figura 2:

Figura 14 quadrado da soma.



Fonte: Produção das autoras (2022)

Solicitaremos a área do quadrado de lado $a - b$ (azul). Para isso, induziremos os estudantes a calcularem a área desse quadrado como sendo a área do quadrado maior, o original de lado a menos a área dos outros três polígonos formados. Portanto teremos $(a - b)^2 = a^2 - b \cdot (a - b) - b \cdot (a - b) - b^2 = a^2 - ba + b^2 - ba + b^2 - b^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Então perguntaremos se os alunos observaram o que acontece com o quadrado da diferença, tomando como base o enunciado do Quadrado da Soma. Posterior a isso, enunciaremos o Quadrado da diferença:

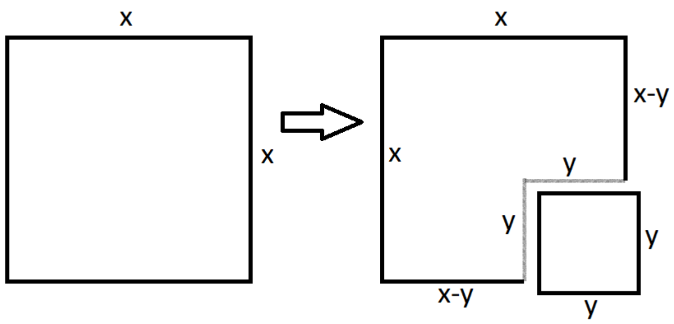
Quadrado da diferença: um quadrado cujo lado é o primeiro termo, menos dois retângulos cuja área é o produto dos dois termos, mais um outro quadrado cujo lado é o segundo termo.

(15-20 min)

Na sequência, trabalharemos com Produto da Soma pela Diferença de Dois Termos ou a Diferença de Quadrados. Faremos uma atividade com papel para mostrar geometricamente essa propriedade.

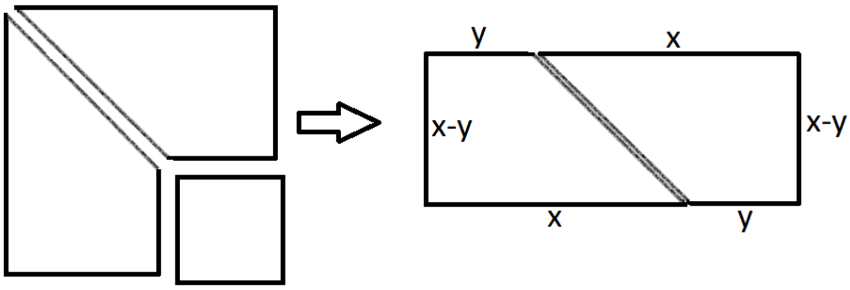
Entregaremos um quadrado de lado x para os alunos e pediremos que eles marquem um quadrado de lado y em um dos lados do quadrado original e recortem ele. Os estudantes deverão anotar na frente e no verso do quadrado a medida dos lados, como na figura 3.

Figura 15 quadrado da diferença.



Fonte: Produção das autoras (2022)

Figura 16 quadrado da diferença recorte.



Fonte: Produção das autoras (2022)

Depois, recortar e montar os polígonos como na figura 4. Analisando a nova figura formada, mostraremos que a área do quadrado original x^2 menos a área do quadrado retirado y^2 é igual a área de um retângulo de lado $(x+y)(x-y)$.

Produto da soma pela diferença de dois termos ou Diferença de quadrados: $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$

(15-20 min)

Posteriormente, iremos apresentar o conteúdo de fatoração, iniciando pelo Fator comum em evidência. Usamos esse tipo de fatoração, quando existir um fator que se repete em todos os termos do polinômio. Apresentaremos um exemplo para explicar:

Exemplo 1: $3x^2+6x^3+9x^4$

Vamos analisar com os alunos que temos o fator 3 e uma potência de x em comum, logo colocaremos $3x$ em evidência. Na sequência faremos questionamentos para continuar a fatoração, por exemplo “qual o monômio que multiplicado por $3x$ resulta em $3x^2$?”, “qual monômio multiplicado por $3x$ que resulta em $6x^3$?” e “qual monômio multiplicado por $3x$ resulta em $9x^4$?”. Assim teremos $3x(x+2x^2+3x^3)$. Podemos notar que ainda temos um fator em comum que é o x, então repetiremos o processo e vamos obter $3x\cdot x(1+2x+3x^2)=3x^2(1+2x+3x^2)$. Explicaremos que uma forma de verificar se está correto é fazer a distributiva, se resultar no polinômio inicial estará correto.

Então falaremos sobre Fatoração por agrupamento, que é utilizada quando não há um fator comum a todos os termos do polinômio. Novamente usaremos um exemplo:

Exemplo 2: $\mathrm{bx} - 2\mathrm{b} + \mathrm{x} - 2$

Iniciaremos usando a fatoração por evidência estudada anteriormente, pois temos o x em comum aos fatores bx e x, e o fator -2 em comum aos fatores $2b$ e 2. Assim teremos $x(b+1) - 2(b+1)$. Pediremos aos alunos se observam mais algum fator em comum; esperaremos que eles respondam que temos o fator $(b+1)$, caso contrário, conduziremos até que cheguem nessa resposta, e então faremos o processo de colocar em evidência mais uma vez, obtendo $(b+1)(x-2)$.

Então trabalharemos com o trinômio quadrado perfeito e diferença entre dois quadrados, ambos retomando a ideia dos produtos notáveis e mostrando que fatorar é o caminho inverso, novamente usando exemplos para mostrar cada um deles: **(15 min)**

Exemplo 3: $x^2 + 18x + 81$

Inicialmente vamos identificar se temos dois fatores que possuem raiz quadrada exata, nesse caso temos o x^2 e o 81, onde $\sqrt{x^2} = x$ e $\sqrt{81} = 9$. Então basta verificar se $(x+9)^2$ resulta em $x^2 + 18x + 81$, para isso podemos usar conhecimentos já adquiridos durante a aula. Nesse caso, $(x+9)^2$ é a forma fatorada da expressão do exemplo 3.

Para a diferença entre dois quadrados:

Exemplo 4: $25x^2 - 100$

Nesse caso, tiraremos a raiz quadrada de cada um dos seus termos, logo, temos: $\sqrt{25x^2} = 5x$ e $\sqrt{100} = 10$. Como é a diferença dos quadrados, basta reescrever esse polinômio como o produto da soma pela diferença das raízes encontradas, ou seja, $(5x+10)(5x-10)$. **(15 min)**

Posteriormente, jogaremos o jogo de dominó dos polinômios, retirado do livro de Antonio José Lopes Bigode, Matemática hoje é feita assim, para praticar e tirar possíveis dúvidas que os alunos ainda possam ter. O jogo será utilizado para fixação e avaliação da aprendizagem. **(20 min)**

Para finalizar, resolveremos os problemas da lista que entregamos aos alunos no início da aula.

Avaliação: A avaliação será realizada de maneira contínua, observando a participação dos alunos durante o desenvolvimento da aula, e a resolução dos exercícios propostos da lista entregue.

Referências:

BIGODE, Antonio José Lopes. **Matemática hoje é feita assim**. São Paulo: FTD, 2000

FATORAÇÃO DE POLINÔMIOS. Disponível em: https://www.preparaenem.com/matematica/fatoracao-de-polinomios.htm. Acesso em: 12 fev. 2022.

IEZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática Elementar: Complexos, Polinômios e Equações. Vol 6, 8 ed.. São Paulo: Atual, 2013.

PROBLEMAS DO ENEM SOBRE PRODUTOS NOTÁVEIS. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/produtos-notaveis-exercicios/. Acesso em: 11 mar. 2022.

PROBLEMAS DO ENEM SOBRE FATORAÇÃO. Disponível em: https://portal.educacao.go.gov.br/wp-content/uploads/2021/04/Lista-1a-Serie-Semana-10-para-o-estudante.pdf. Acesso em 11 mar. 2022.

PROBLEMAS DO ENEM SOBRE FATORAÇÃO. Disponível em: https://cursoenemgratuito.com.br/fatoracao-simulado-de-matematica/. Acesso em 11 mar. 2022.

O QUE SÃO POLINÔMIOS. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-polinomio.htm. Acesso em: 10 fev. 2022.

O QUE SÃO POLINÔMIOS. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/polinomios.htm#:~:text=Mon%C3%B4mio%20%C3%A9%20um%20termo%20alg%C3%A9brico,ou%20subtra%C3%A7%C3%A3o%20de%20dois%20polin%C3%B4mios.&text=Polin%C3%B4mios%20s%C3%A3o%20express%C3%B5es%20alg%C3%A9bricas%20com%20mon%C3%B4mios%20separados%20por%20adi%C3%A7%C3%A3o%20ou%20subtra%C3%A7%C3%A3o. Acesso em: 10 fev. 2022.

O QUE É POLINÔMIO. Disponível em: https://matematicaseriada.blogspot.com/2014/02/monomios-e-polinomios.html. Acesso em: 10 fev. 2022.

O QUE É POLINÔMIO. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/polinomios/. Acesso em: 10 fev. 2022.

RAIZ DO POLINÔMIO. Disponível em: https://www.preparaenem.com/matematica/raiz-um-polinomio.htm#:~:text=No%20estudo%20do%20valor%20num%C3%A9rico,polin%C3%B4mio%20seja%20igual%20a%20zero. Acesso em: 03 mar. 2022.

7.2. RELATÓRIO AULA 3.

Aos dezenove dias do mês de março do ano de 2022, realizamos o terceiro encontro do Promat – Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – Unioeste, no bloco A, sala 104. Nesse encontro, os conteúdos abordados foram polinômios, produtos notáveis e fatoração. Antes da chegada dos alunos, deixamos a sala organizada com 6 grupos de 4 carteiras cada.

Iniciamos o encontro às 8 horas retomando a lista deixada no encontro anterior. Resolvemos com os alunos os problemas que tinham dúvidas e os que tiveram respostas divergentes entre eles. Durante a resolução, os estudantes foram muito participativos, expondo suas ideias e forma de resolução.

Posteriormente, iniciamos o conteúdo de polinômios com o problema 1, da nova lista que lhes entregamos, que pedia o perímetro e área de um retângulo dado inicialmente seus lados x e $3x$, e de outra figura formada com a retirada de um retângulo de 5 por 2 de um dos cantos da figura inicial. Deixamos 5 minutos para que os alunos pensassem na resolução e depois pedimos para que compartilhassem como ou o que tinham usado para solucionar o problema. Uma das alunas disse que a solução era somar todos os lados da figura "$x + 3x + 3x + x = 8x$", com isso relembramos o que era perímetro e perguntamos por que poderíamos somar as parcelas dessa expressão e como poderíamos chamá-la, e a aluna respondeu que poderia somar "porque é tudo x" e que era um "polinômio". Em seguida relembramos como calcular a área de retângulos e perguntamos como solucionaram, um aluno respondeu que a área do primeiro era $3x^2$, e do segundo era "a área total, a mesma da primeira, menos a área do retângulo que foi tirado". Após resolvermos esse problema, exploramos e exemplificamos sobre monômios, binômios e trinômios. Então definimos escrevendo na lousa o que são polinômios, seus coeficientes, partes literais e raiz, enfatizando que essas nomenclaturas seriam importantes no decorrer da aula e da própria vida escolar.

Na sequência, falamos sobre monômios semelhantes e retornamos ao problema inicial para esclarecer que somamos a expressão $x + 3x + 3x + x$ porque a parte literal desses monômios eram semelhantes. Depois, colocamos mais alguns exemplos no quadro e com eles abordamos também adição e subtração de polinômios. Abordamos que não podemos somar ou subtrair monômios com partes literais diferentes, porque elas podem representar valores diferentes. Por exemplo, na expressão $m^2n + 2m^2n + 3a - 4a$ só podemos operar as duas primeiras parcelas e as duas últimas, pois cada uma delas tem partes literais iguais. Nesse momento uma das alunas mencionou "é o mesmo caso de somar $x + x^2$, não podemos porque são coisas diferentes", então enfatizamos isso que foi dito e, percebemos que isso também tinha ficado claro para os demais colegas.

Seguindo, trabalhamos com multiplicação de polinômios, falamos sobre a propriedade distributiva e que deveriam multiplicar coeficiente com coeficiente e parte literal com parte literal, termo a termo. Resolvemos um exemplo e colocamos outro na lousa para que resolvessem, corrigindo-o depois de alguns minutos.

Posteriormente, usamos o método da divisão euclidiana para divisão de polinômios, primeiramente retomando o algoritmo com uma representação numérica. Percebemos que os alunos começaram a demonstrar cansaço e se dispersar, possivelmente por ter muita teoria sendo abordada.

O próximo tema foi os produtos notáveis. Iniciamos com o Quadrado da Soma e fizemos uma atividade prática para representar geometricamente essa propriedade, distribuindo aos alunos um quadrado, trabalhamos com ele. Essa atividade prendeu a atenção dos alunos novamente. Tivemos casos que os alunos dividiram o quadrado inicial em quadrados novamente (dividiram no meio e, novamente no meio) ao invés de obter dois quadrados de lados diferentes e dois retângulos iguais, então explicamos que aquele era um caso particular, mas mostramos que o raciocínio era o mesmo; já que na hora de anotar as expressões eles obtiveram a soma da área dos quatro quadrados de lado x, sendo $4x^2$ e que desenvolvendo a multiplicação para encontrar a área do quadrado inicial teriam $(x + x)^2 = x^2 + x \cdot x + x \cdot x + x^2 = x^2 + 2x \cdot x + x^2 = x^2 + 2x^2 + x^2 = 4x^2$.

Para o Quadrado da Diferença e a Diferença de quadrados, adaptamos e mostramos apenas por desenhos, sem usar o material manipulável como anteriormente, por conta do tempo da aula. Ainda assim, pudemos perceber que a ideia principal de cada propriedade ficou clara para os alunos.

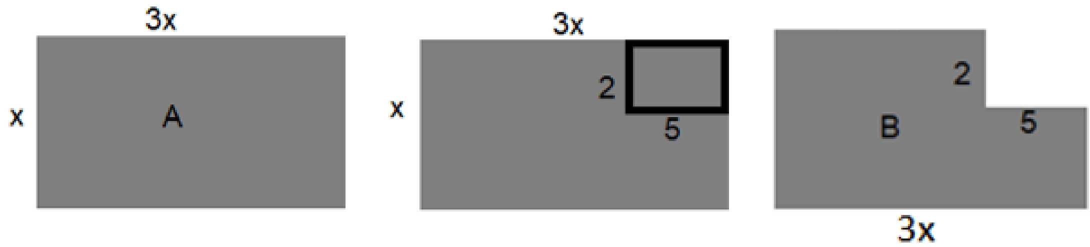
Por fim, resolvemos os exercícios 6 e 7 da lista para ensinar o tema de fatoração; esses exercícios pediam para que o aluno usasse fatoração por agrupamento da expressão que representava o perímetro de um retângulo para encontrar sua forma fatorada, e na outra que encontrasse a forma fatorada de um trinômio quadrado perfeito, respectivamente.

Não pudemos fazer a aplicação do jogo dominó dos polinômios proposto no plano de aula, por conta do tempo. No final da aula fizemos a chamada totalizando 19 alunos. Às 11 horas e 40 minutos encerramos o encontro. Para finalizar, organizamos a sala colocando as mesas novamente em fila.

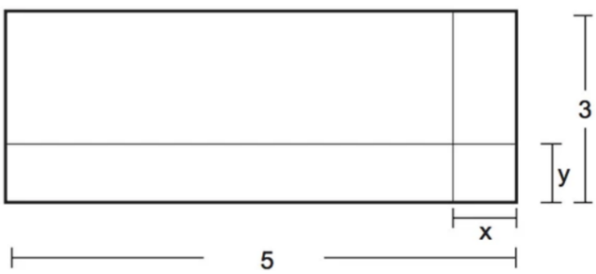
7.3. MATERIAL ENTREGUE.

Lista de exercícios

Problema 1) Ana Lúcia construiu uma região retangular A, cujo comprimento em centímetros mede o triplo da largura. Em seguida, tirou uma parte retangular de 5 cm por 2 cm. Observe as figuras e escreva, na forma mais simples possível, as expressões algébricas que indicam: o perímetro de A, o perímetro de B, a área de A e a área de B.



1) (ENEM - 2012) Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é (5 – x) (3 – y).



Nestas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por:

a) 2xy b)15 – 3x c) 15 – 5y d) – 5y – 3x e) 5y + 3x – xy

2) (Fuvest - SP) A diferença entre os quadrados da soma de dois números naturais é 21. Um dos possíveis valores da soma dos quadrados desses dois números é:

a) 29 b) 97 c) 132 d) 184 e) 252

3) (Fatec - 2017) Ao entrar na sua sala de aula, Pedro encontrou as seguintes anotações no quadro:

$$\boxed{\begin{array}{c} a+b=6 \\ a\cdot b=4 \\ a^2+b^2=? \end{array}}$$

Usando seus conhecimentos sobre produtos notáveis, Pedro determinou corretamente o valor da expressão $a^2 + b^2$. Esse valor é:

a) 26 b) 28 c) 32 d) 36

4) (Cefet/MG – 2017) Se x e y são dois números reais positivos, então a expressão $M = \left(x\sqrt{\frac{y}{x}} + x\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2$ é equivalente a:

a) $\sqrt{xy}$ b) $2xy$ c) 4xy d) $2\sqrt{xy}$

5) (UFRGS - 2016) Se $x + y = 13$ e $x \cdot y = 1$, então x^2+y^2 é:

a) 166 b) 167 c) 168 d) 169 e) 170

6) (UTF PR - 2017) Uma indústria fabrica uma placa metálica no formato de um retângulo de lados $(ax + by)$ e $(bx + ay)$. Encontre, de forma fatorada, o perímetro deste retângulo.

a) $2(a-b)(x-y)$ b) $4(a+b)(x+y)$ c) $4(a-b)(x-y)$

d) $2(a+b)(x+y)$ e) $(a+b)(x+y)$

7) (IFPR - 2020) A área de um terreno pode ser representada pela expressão algébrica $x^2 + 16x + 64$. Sabendo que esse terreno tem a forma de um quadrado, assinale a alternativa que indica a expressão algébrica que representa a medida do lado desse terreno.

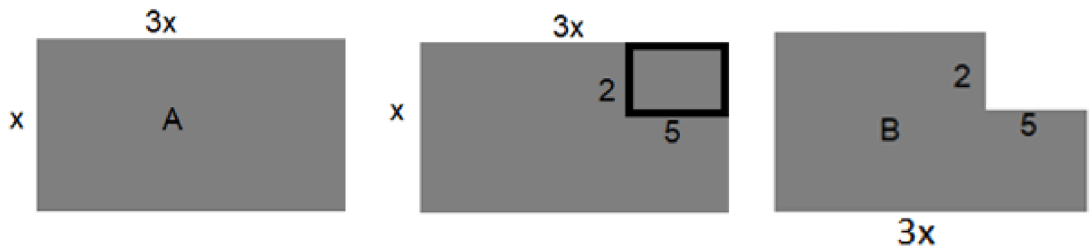
a) x + 5 b) x + 6. c) x + 7 d) x + 8 e) x + 9

8) (ESPM SP - 2019) O número que se deve somar a $456\ 788^{\ 2}$ para se obter $456\ 789^2$ é:

a) 1 b) 456 789 c) 456 788 d) 913 577 e) 913 579

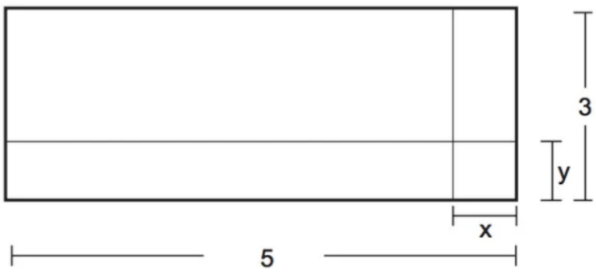
7.4. RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS.

Problema 1) Ana Lúcia construiu uma região retangular A, cujo comprimento em centímetros mede o triplo da largura. Em seguida, tirou uma parte retangular de 5 cm por 2 cm. Observe as figuras e escreva, na forma mais simples possível, as expressões algébricas que indicam: o perímetro de A, o perímetro de B, a área de A e a área de B.



Resolução: O perímetro é a soma de todos os lados da figura, portanto o perímetro de A é $x + 3x + x + 3x = 8x$, e de B é $x + (3x - 5) + (x - 2) + 3x + 5 + 2 = 8x$. A área é dada por base multiplicado pela altura, então área de A é $3x \cdot x = 3x^2$, e área de B é área de A subtraído a área do retângulo retirado, portanto é $3x^2 - 2 \cdot 5 = 3x^2 - 10$.

1) (ENEM - 2012) Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é (5 – x) (3 – y).



Nestas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por:

a) 2xy b)15 – 3x c) 15 – 5y d) – 5y – 3x e) 5y + 3x – xy

Resolução: Como quer a área perdida do forro, basta fazer a diferença entre a área total original do forro e a área do forro após ser lavado, ou seja: $3 \cdot 5 - (5 - x)(3 - y) = 15 - (15 - 5y - 3x + xy) = 5y + 3x - xy$, alternativa e).

2) (Fuvest - SP) A diferença entre os quadrados da soma de dois números naturais é 21. Um dos possíveis valores da soma dos quadrados desses dois números é:

a) 29 b) 97 c) 132 d) 184 e) 252

Resolução: Sabemos que a diferença entre os quadrados da soma de dois números naturais é 21, então temos $x^2 - y^2 = 21$. Sabemos também que a diferença de quadrados pode ser dada por $(x + y)(x - y)$. Podemos escrever o número 21 como o produto de 3 por 7, assim temos $(x + y)(x - y) = 3 \cdot 7$, então podemos dizer que $x + y = 3$ e $x - y = 7$. Isolando x da primeira equação, temos $x = 3 - y$, e substituindo na segunda temos $3 - y - y = 7$, logo $y = (-2)$, substituindo agora o valor de y temos $x + (-2) = 3$ logo $x = 5$. Por fim, o resultado que se pede é $x^2 + y^2 = 5^2 + (-2)^2 = 25 + 4 = 9$. Alternativa a).

3) (Fatec - 2017) Ao entrar na sua sala de aula, Pedro encontrou as seguintes anotações no quadro:

$$\boxed{\begin{array}{c} a + b = 6 \\ a \cdot b = 4 \\ a^2 + b^2 = ? \end{array}}$$

Usando seus conhecimentos sobre produtos notáveis, Pedro determinou corretamente o valor da expressão $a^2 + b^2$. Esse valor é:

a) 26 b) 28 c) 32 d) 36

Resolução: Podemos usar o quadrado da soma de dois termos para solucionar esse problema, então: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Como queremos encontrar o valor da expressão $a^2 + b^2$, vamos isolar essa expressão no resultado anterior, então teremos $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow (a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$. Agora, substituindo com os valores dados no problema temos: $(6)^2 - 2 \cdot 4 = a^2 + b^2 \Rightarrow 36 - 8 = a^2 + b^2 \Rightarrow 28 = a^2 + b^2$. Logo alternativa b).

4) (Cefet/MG – 2017) Se x e y são dois números reais positivos, então a expressão $M = \left(x\sqrt{\frac{y}{x}} + x\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2$ é equivalente a:

a) $\sqrt{xy}$ b) $2xy$ c) 4xy d) 2$\sqrt{xy}$

Resolução: Desenvolvendo o quadrado da soma de dois termos, temos:

$$M = \left(x\sqrt{\frac{y}{x}} + x\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2$$

$$\left(x\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 + 2x\sqrt{\frac{y}{x}} \cdot y\sqrt{\frac{x}{y}} + \left(y\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2$$

$$x^2 \cdot \frac{y}{x} + 2xy\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y}} + y^2 \cdot \frac{x}{y}$$

$$xy + 2xy + yx \Rightarrow 4xy$$

Logo a resposta é alternativa c).

5) (UFRGS - 2016) Se $x + y = 13$ e $x \cdot y = 1$, então $x^2 + y^2$ é:

a) 166 b) 167 c) 168 d) 169 e) 170

Resolução: Usando o quadrado da soma de dois termos para solucionar esse problema, temos: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Como queremos encontrar o valor da expressão $x^2 + y^2$, vamos isolar essa expressão no resultado anterior, então teremos $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \Rightarrow (x + y)^2 - xy = x^2 + y^2$. Agora, substituindo com os valores dados no problema temos: $(13)^2 - 2 \cdot 1 = x^2 + y^2 \Rightarrow 169 - 2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 167 = x^2 + y^2$. Logo alternativa b).

6) (UTF PR - 2017) Uma indústria fabrica uma placa metálica no formato de um retângulo de lados $(ax + by)$ e $(bx + ay)$. Encontre, de forma fatorada, o perímetro deste retângulo.

a) $2(a - b)(x - y)$ b) $4(a + b)(x + y)$ c) $4(a - b)(x - y)$

d) $2(a + b)(x + y)$ e) $(a + b)(x + y)$

Resolução: O período é a soma de todos os lados do retângulo, então: $2(ax\ +\ by) + 2(bx\ +\ ay) = 2ax + 2by + 2bx + 2ay = 2a(x + y) + 2b(x + y) = 2(x + y)(a + b)$. Logo a alternativa correta é a d).

7) (IFPR - 2020) A área de um terreno pode ser representada pela expressão algébrica $x^2\ +\ 16x\ +\ 64$. Sabendo que esse terreno tem a forma de um quadrado, assinale a alternativa que indica a expressão algébrica que representa a medida do lado desse terreno.

a) x + 5 b) x + 6. c) x + 7 d) x + 8 e) x + 9

Resolução: Relembrando a fatoração (trinômio quadrado perfeito) e analisando se temos dois fatores que possuem raiz quadrada exata, percebemos que temos o x^2 e o 64, onde $\sqrt{x} = x$ e $\sqrt{64} = 8$. Então verificamos que $(x + 8)^2$ resulta em $x^2\ +\ 16x\ +\ 64$, portanto alternativa d) é correta.

8) (ESPM SP - 2019) O número que se deve somar a $456\ 788\ ^2$ para se obter $456\ 789^2$ é:

a) 1 b) 456 789 c) 456 788 d) 913 577 e) 913 579

Resolução: Com as informações do problema obtemos $x + 456\ 788\ ^2 = 456\ 789^2$, podemos escrever ainda $x = 456\ 789^2 - 456\ 788\ ^2$. Agora notemos que temos a diferença de dois quadrados, e sabemos que $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$, portanto podemos escrever $(456\ 789 - 456788)(456\ 789 + 456788 = x$, logo $1 \cdot (913577) = x$. Então resposta correta é alternativa d).

8. ENCONTRO 4.

8.1 PLANO DE AULA 4 - 26/03/2022

Conteúdo: Equações; sistemas lineares.

Público-alvo: alunos oriundos da 3° série do ensino médio da rede pública estadual do Paraná.

Objetivo geral: Desenvolver a capacidade de identificar e reconhecer situações-problemas que possam ser solucionadas por meio de equações de 1° grau ou sistemas de equações do 1ºgrau.

Objetivos específicos:

- Compreender e reconhecer equações de 1° grau;

- Desenvolver o raciocínio lógico e algébrico;
- Analisar, identificar as incógnitas de uma expressão algébrica;
- Interpretar e traduzir situações problema para a linguagem matemática.

Tempo de execução: 3h 40 min.

Recursos didáticos: balança de pratos, quadro, giz, apagador, material impresso.

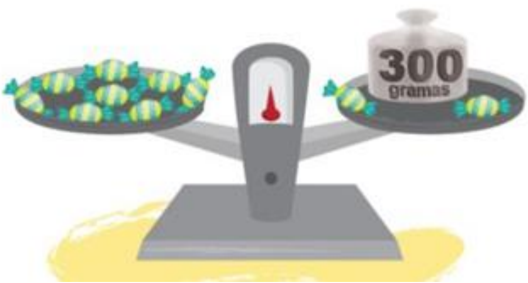
Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos a aula retomando o encontro anterior, solucionaremos a lista deixada aos alunos, haverá liberdade caso alguém queira compartilhar sua solução com os demais. **(10-15min)**

Logo após o momento de retomada iniciaremos o conteúdo desse encontro por meio de uma situação problema retirada da OBMEP-2018.

Problema 1: Os 10 bombons da balança têm o mesmo peso. Quantos gramas "pesa" cada um?

Figura 17 balança



Fonte: OBMEP 2018 A - questão 12

(5-10min)

Levaremos uma balança confeccionada com cabide de madeira para auxiliar a interpretação do problema. Deixaremos que os alunos trabalhem em grupo na solução do problema, depois solicitaremos que compartilhem a solução que chegaram e qual caminho utilizaram.

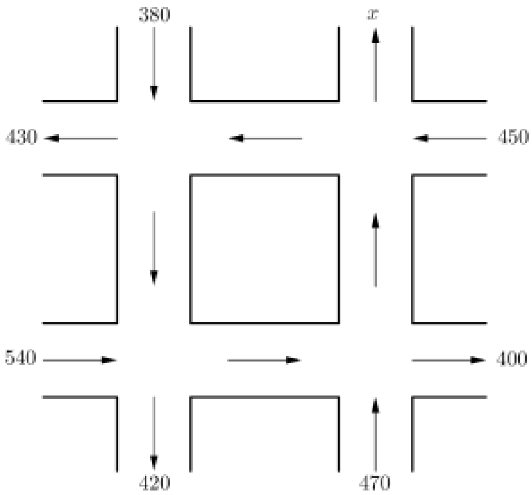
Retomaremos o primeiro problema proposto e questionaremos os alunos de que maneira eles representaram o peso do bombom que era desconhecido. Esperamos que eles digam que usaram letras ou símbolos, então diremos que na matemática os valores desconhecidos são definidos como incógnitas, que segundo o dicionário de português incógnita significa: "Grandeza que deve ser encontrada para a resolução de uma equação ou de um problema". Exploraremos oralmente com a turma em que situações as incógnitas costumam aparecer, por acreditarmos que já possuem um conhecimento prévio. Esperamos que alguém irá levantar o assunto equações então confirmaremos que o conteúdo a ser abordado durante o encontro será equação do 1° grau.

Anunciaremos então que equações são: “De modo geral, as equações são definidas como igualdades entre expressões algébricas, com a presença de uma ou mais incógnitas.”(CAIUSCA-2019)**. (10-15min)**

Após o momento de conversa vamos propor mais um problema a turma, retirado do *site* da OBMEP.

Problema 2: A figura abaixo mostra parte de uma cidade e as setas indicam o fluxo de veículos que entram ou saem em determinada rua. Todos os veículos que entraram nesta área da cidade, saíram. Qual o valor de x?

Figura 18 ruas.



Fonte: https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/7tibk1tt4z488.pdf

(5-10min)

Deixaremos um tempo para que pensem em uma solução, e novamente pediremos se alguém gostaria de apresentar sua solução para os demais.

Nesse problema os alunos precisarão montar a equação e encontrar o valor de x, falaremos então sobre a solução de uma equação.

Dada uma equação, chama-se raiz da equação todo número que, substituído em lugar de x, torna a sentença verdadeira.

Exemplo: quais as raízes das equações abaixo?

a) $21x - 17 = 109$

b) $73x + 100 = 53$

c) $12x - 16 = -21 + 10x$

Conjunto solução: Chama-se conjunto solução ou conjunto verdade da equação o conjunto S cujos elementos são as raízes da equação.

(10-15min)

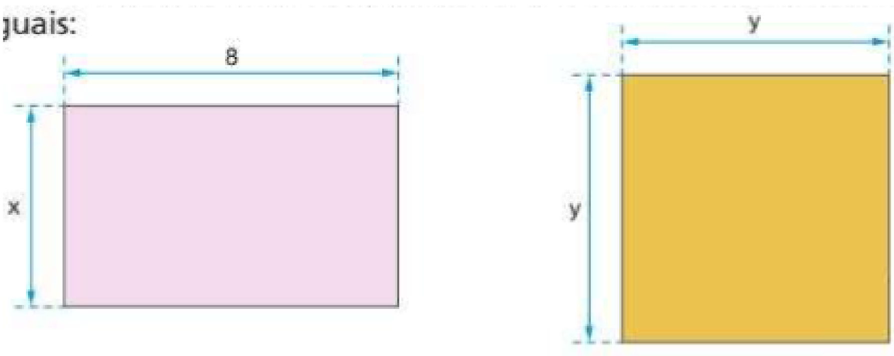
Para determinar a raiz de uma equação, explicaremos que o objetivo é isolar a incógnita em um dos membros da equação e ir desfazendo as operações que foram realizadas. Para isso usaremos a balança de dois pratos como referência, ao explicar os passos para isolar a incógnita, deixando claro que por se tratar de uma igualdade, toda operação deve ser realizada igualmente dos dois lados da igualdade. Tudo que se faz em um prato deve-se fazer no outro, a fim de manter o equilíbrio.

Deixaremos claro que a referência à balança funciona no conjunto solução dos números naturais, já que não existe "peso" negativo. Com isso buscaremos ressaltar a importância do conjunto solução, pois, dependendo dele, a raiz pode ou não existir.

Em seguida para abordar equação com duas incógnitas vamos propor um novo problema, retirado do livro didático "A Conquista da Matemática do 8° ano"(JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018, p. 148).

Problema 3: Vamos considerar que as figuras representadas a seguir têm perímetro iguais:

Figura 19 retângulo e quadrado.



Fonte: JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018, p. 148

a) qual é a equação do 1° grau que representa esse fato?

b) se você atribuir um valor de 380 m para o perímetro, qual a medida x e y das figuras?

(10min)

Com o auxílio do Geogebra, faremos uma interpreção geométrica das equações com duas incógnitas. Digitaremos a equação montada para resolver o problema anterior assim como outras equação, levaremos algumas, mas incentivaremos os alunos a participarem sujerindo equações.

Sujestões:

$$\boldsymbol{a)x+y=4 \quad b)\frac{x}{2}+y=3 \quad c)2x+3y=15 \quad d)3x+y=21 \quad e)x+2y=12}$$

(25-30min)

Esperamos que os alunos percebam que a representação geométrica de uma equação do 1° grau com duas incógnitas é uma reta. E que os pares ordenados são pontos pertencentes a essa reta e são soluções para a equação dada.

Em sequência iniciaremos os sistemas lineares, e novamente com um problema.

Problema 4: Em uma loja, Carlos comprou 4 camisas e 3 calças e pagou R$ 560,00. No mesmo dia, Maria comprou 1 camisa e 3 calças iguais às de Carlos e desembolsou R$ 410,00 no total. Sabendo que não houve alteração de preço nesse dia, qual o preço de 1 camisa e de 1 calça? (DANTE,, Luiz R)

(5-10min)

Deixaremos um tempo para que os alunos encontrem uma solução, observaremos que método eles usaram para solucionar. Também nos atentaremos às dificuldades que apresentarem, assim como todos os problemas propostos nesse encontro, os alunos serão convidados a compartilharem suas soluções com a turma.

Caso ninguém se proponha a fazê-lo, nós o solucionaremos então, mostrando alguns métodos utilizados para encontrar a solução de um sistema linear.

Método da substituição:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 560 \\ x + 3y = 410 \end{cases}$$

1° passo: isolar a incógnita de uma das equações.

$$x = 410 - 3y$$

2° passo: substituir na primeira equação.

$$4(410 - 3y) + 3y = 560$$

3° passo: encontrar a raiz da equação.

$$1\,640 - 12y + 3y = 560$$

$$-9y = -1\,080$$

$$y = 120$$

4° passo: substituir y na segunda equação.

$$\mathrm{x} = 410 - 3\mathrm{y}$$

$$\mathrm{x} = 410 - 3 \cdot 120$$

$$\mathrm{x} = 410 - 360$$

$$x = 5$$

Método da adição:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 560 \\ x + 3y = 410 \end{cases}$$

1° passo: multiplique a segunda equação por -1.

$$-x - 3y = -410$$

2° passo: some a primeira equação com a segunda.

$$4x + 3y + (-x - 3y) = 560 + (-410)$$

$$3x = 150$$

$$x = 50$$

3° passo: substituir x na primeira equação.

$$4x + 3y = 560$$

$$4 \cdot 50 + 3y = 560$$

$$200 + 3y = 560$$

$$3y = 360$$

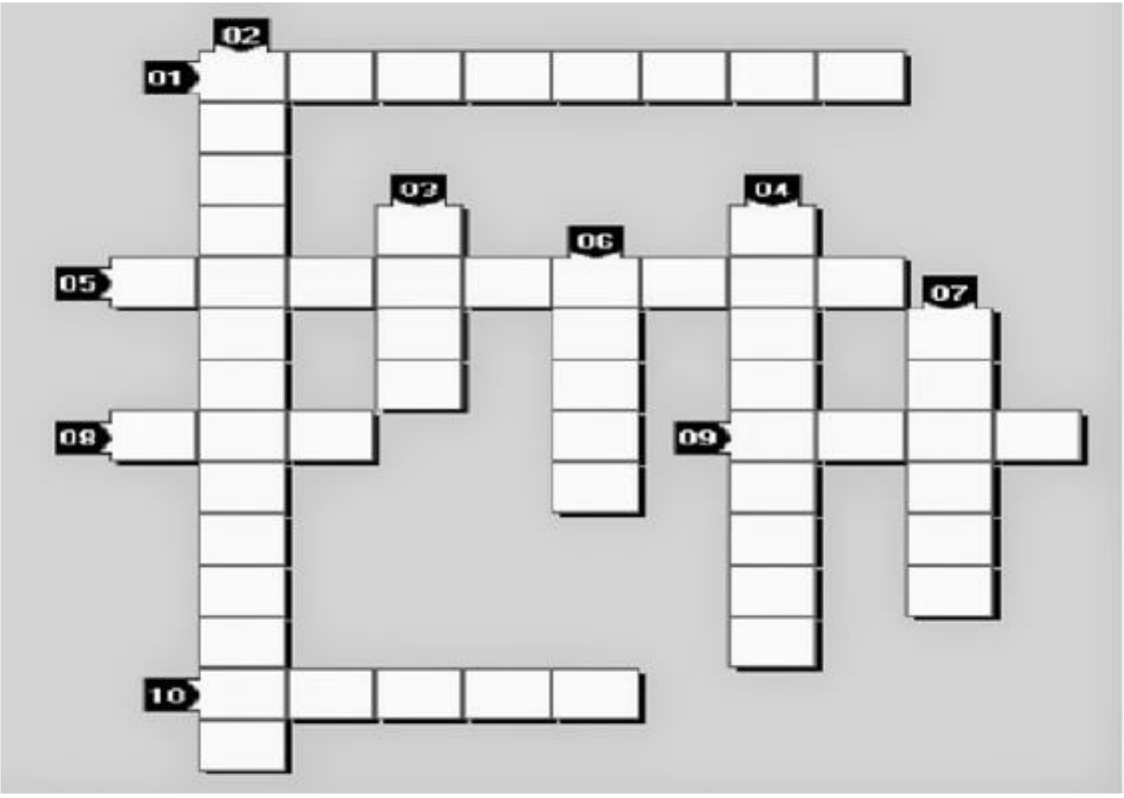
$$y = 120$$

(15-20min)

Faremos uso do Geogebra para realizar novamente uma interpretação geométrica dos sistemas de equações lineares. O roteiro para essa etapa encontra se na lista de exercícios. **(5-10min)**

Como próxima atividade teremos uma cruzadinha de equações. A atividade consiste em escrever a equação correspondente a sentença, e depois determinar a raiz dessa equação encontrada. Para solucionar a cruzadinha os alunos precisarão mobilizar os conhecimentos abordados durante todo o encontro.

Figura 20 cruzadinha.



01) O triplo de um número, menos vinte e cinco, é igual ao próprio número, mais cinquenta e cinco. Qual esse número?

02) A idade de um pai é igual ao triplo da idade de seu filho. Calcule a idade do pai sabendo que os dois juntos têm sessenta anos.

03) A soma de um número com seu triplo é igual a quarenta e oito. Que número é esse?

04) O dobro de um número, somado com quinze, é igual a quarenta e nove. Qual é esse número?

05) O triplo de um número, mais dois é igual ao próprio número menos quatro. Qual é esse número?

06) Num estacionamento há carros e motos, totalizando setenta e oito veículos, o número de carro é igual a cinco vezes o número de motos. Quantas motos há nesse estacionamento?

07) Somando cinco anos ao dobro da idade de Cíntia, obtemos trinta e cinco. Qual a idade de Cíntia?

08) Um número mais a sua metade é igual a quinze. Qual é esse número?

09) O quádruplo de um número, diminuído de dez, é igual ao dobro desse número somado com dois. Qual é esse número?

10) O dobro de um número, diminuído de quatro, é igual a esse número aumentado de um. Qual é esse número?

(25-30min)

A solução da atividade novamente contará com a participação dos alunos, compartilhando as soluções no quadro.

Em sequência trabalharemos a solução dos demais exercícios presentes na lista que foi entregue no início da aula. **(25-30min)**

Avaliação: A avaliação será de maneira contínua, observando a participação dos alunos durante o desenvolvimento da aula, e a resolução da lista proposta.

Referências:

DANTE, Luiz R. Teláris: Ensino fundamental- anos iniciais Matemática 8° ano. São Paulo: Ática,2018

ENEM EQUAÇÃO DO 1° GRAU. Disponível em:https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/equacao-do-primeiro-grau. Acesso em: 17 fev. 2022.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Complexos, Polinômios e Equações. Vol 6. 8 ed. São Paulo: Atual, 2013.

JÚNIOR, José R. G; CASTRUCCI, Benedicto. A conquista da matemática 8. 4 ed. São Paulo: FTD, 2018.

OBMEP EQUAÇÃO DO 1° GRAU. Disponível em:https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=44&tipo=4. Acesso em: 16 fev. 2022.

OBMEP. Provas e Soluções. Disponível em: http://www.obmep.org.br/provas.htm. Acesso em: 13 dez. 2021

PROVAS ANTERIORES UNIOESTE. Disponível em: https://www.unioeste.br/portal/vestibular/anteriores. Acesso em: 16 fev.2022

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES. Disponível em:https://plurall-content.s3.amazonaws.com/oeds/NV_ORG/PNLD/PNLD20/Telaris_Matematica/8ano/03_BIMESTRE/08_VERSAO_FINAL/03_PDFS/18_TEL_MAT_8ANO_3BIM_Sequencia_didatica_1_TRTAT.pdf. Acesso em: 16 fev. 2022.

8.2 RELATÓRIO AULA 4.

Aos vinte e seis dias do mês de março do ano de 2022, realizamos o quarto encontro do Promat– Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática, nas dependências da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste, no bloco A, sala 104. Nesse encontro, os conteúdos abordados foram equações e sistemas lineares. Antes da chegada dos alunos, deixamos a sala organizada com seis grupos de quatro carteiras cada.

Demos início ao nosso encontro às 8 horas e 10 minutos, retomando a lista deixada na aula anterior. Lemos os exercícios com os alunos, os quais não manifestaram dúvidas e não houve respostas equivocadas nem divergentes.

Começamos então, entregando uma nova lista para os alunos, e demos início a nossa atividade para abordar o tema de equação. Ela consistia em um problema utilizando uma balança de dois pratos contendo oito bombons em um dos seus pratos e uma massa de 300 g mais dois bombons no outro. O objetivo era descobrir a massa de cada bombom. Deixamos um tempo para os estudantes pensarem e discutirem sobre a resolução, enquanto isso, organizamos uma balança confeccionada com cabide de madeira para auxiliar a interpretação do problema. Ainda enquanto resolviam, circulamos pelos grupos como de costume, e percebemos que todos montaram e resolveram uma equação para solucioná-lo. Após o tempo dado, conversamos e pedimos para que compartilhassem como haviam resolvido o problema, um aluno então disse que “$8x$, sendo o x representando cada bombom, é igual a $2x$ mais os 300 gramas. Então passei pra lá subtraindo e ficou $6x = 300\ gramas$, então passei dividindo e obtive o resultado que cada bombom pesa 50 gramas”. Assim, escrevemos na lousa a resolução do colega e simultaneamente fomos trabalhando com a balança. Foi perguntado a eles se, e, de onde, os alunos conheciam uma balança nesse estilo, responderam que em advocacia. Abordamos então que a balança estando em equilíbrio representa a igualdade de “pesos” em ambos os pratos, e então explicamos que passar para o outro lado com sinal trocado é estar desfazendo uma das operações de um lado da balança (equação), consequentemente fazendo o mesmo do outro lado, já que precisamos manter o equilíbrio. Uma das alunas manifestou que havia resolvido, mas percebeu que a resolução estava errada, pois tinha considerado os dez bombons todos de um lado, mas que, agora, havia entendido o problema e o tinha arrumado.

Após solucionar esse problema, falamos sobre incógnita, que é o valor que deve ser encontrado para solucionar um problema, uma equação. Abordamos alguns exemplos do dia a dia quando usamos equação, mesmo que inconscientemente, para fazer algumas coisas, como por exemplo dividir o valor gasto em um restaurante.

Em seguida pedimos que tentassem resolver o problema dois da lista que envolvia a entrada de carros por vários caminhos em uma cidade e a saída deles. Alguns tentaram solucionar por tentativa e erro, analisando cada saída e cada entrada, outros resolveram por equação, sendo a quantidade de carros que entraram na cidade era igual a quantidade de carros que saíram e, ainda, outros pensaram sem usar a equação explicitamente.

Posteriormente falamos sobre a raiz de uma equação e explicamos que a letra x não é a única que pode aparecer, pode ser qualquer letra, inclusive símbolos. Com isso apresentamos mais dois exemplos para os alunos resolverem, e passamos nas carteiras avaliar se tinham ficado claros os conteúdos trabalhados até o momento. Notamos que os alunos compreenderam a ideia central do tema, então demos continuidade corrigindo as equações propostas e falamos sobre conjunto solução. Ainda nesse momento, enfatizamos que isolamos a incógnita desfazendo as operações e que tudo o que fazemos em um dos membros da equação, faremos no outro, usando a balança para deixar isso claro.

Propusemos um problema com objetivo de abordar o tema de equação com duas incógnitas, encontrando a qual representava o perímetro de duas figuras, assim quando a obtivemos, atribuímos um valor à raiz para calcular a medida que cada incógnita representava. Então, com o uso do Geogebra, (pedido alguns dias antes desse encontro, por meio do grupo de *whatsapp*, que os alunos o instalassem em seus celulares), fizemos a interpretação geométrica desta e de outras equações, com o intuito de que os alunos percebessem que estas formam uma reta nos seus respectivos gráficos. Explicamos que os pares ordenados são pontos pertencentes a essa reta e são soluções para a equação dada.

Em seguida falamos sobre sistemas lineares, apresentando um problema que tratava do custo total na compra de certa quantidade de calças e camisetas, perguntando qual era o preço de cada unidade das peças. Observando a resolução dos alunos, percebemos que todos os que responderam usaram o método da adição para solucionar o sistema linear que podia ser interpretado do problema, e ao serem questionados, afirmaram ter sido o único método aprendido na escola. No quadro, apresentamos três maneiras de solucioná-lo, por meio do método da substituição, da adição e do escalonamento do sistema. Posteriormente, usamos o Geogebra novamente para mostrar quando um sistema tem uma solução, nenhuma solução ou infinitas soluções.

Para finalizar, pedimos que realizassem a atividade da cruzadinha de equações que estava no material entregues a eles, onde tinham que escrever a raiz da equação que correspondia a cada sentença. Nesse momento, caminhamos pelos grupos para ver se estavam conseguindo aplicar os conhecimentos adquiridos durante o encontro. A maioria demonstrou conseguir.

Um dos alunos, nos chamou para vermos uma das questões da lista que levariam como tarefa, pois ele havia resolvido e encontrado mais que uma alternativa como solução. Sentamo-nos com ele para entendermos como havia chegado a tal conclusão e ficamos comprometidas a procurar se a questão havia sido recorrida, já que era uma questão de vestibular, a qual falava sobre o preço de alguns alimentos em uma lanchonete e o preço total pago em algumas mesas.

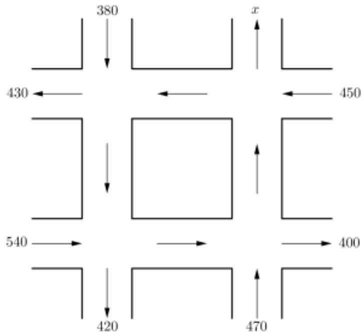
Finalizamos o encontro às 11 horas e 40 minutos, depois de realizarmos a chamada, que totalizou 16 alunos presentes.

8.3 MATERIAL ENTREGUE.

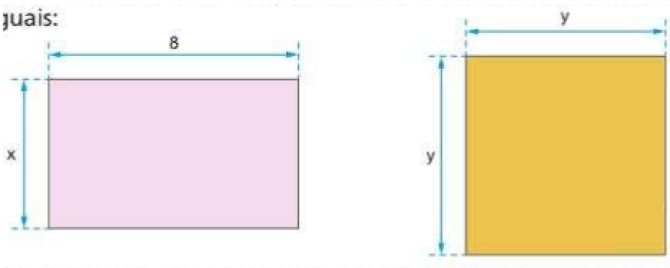
Lista de exercicios - equação do 1° grau e sistema de equação linear.

Problema 1: Os 10 bombons da balança têm o mesmo peso. Quantos gramas “pesa” cada um?

Problema 2: A figura abaixo mostra parte de uma cidade e as setas indicam o fluxo de veículos que entram ou saem em determinada rua. Todos os veículos que entraram nesta área da cidade, saíram. Qual o valor de x?



Problema 3: Vamos considerar que as figuras representadas a seguir têm perímetro iguais:



a) qual é a equação do 1° grau que representa esse fato?

b) se você atribuir um valor de 380 m para o perímetro, qual a medida x e y das figuras?

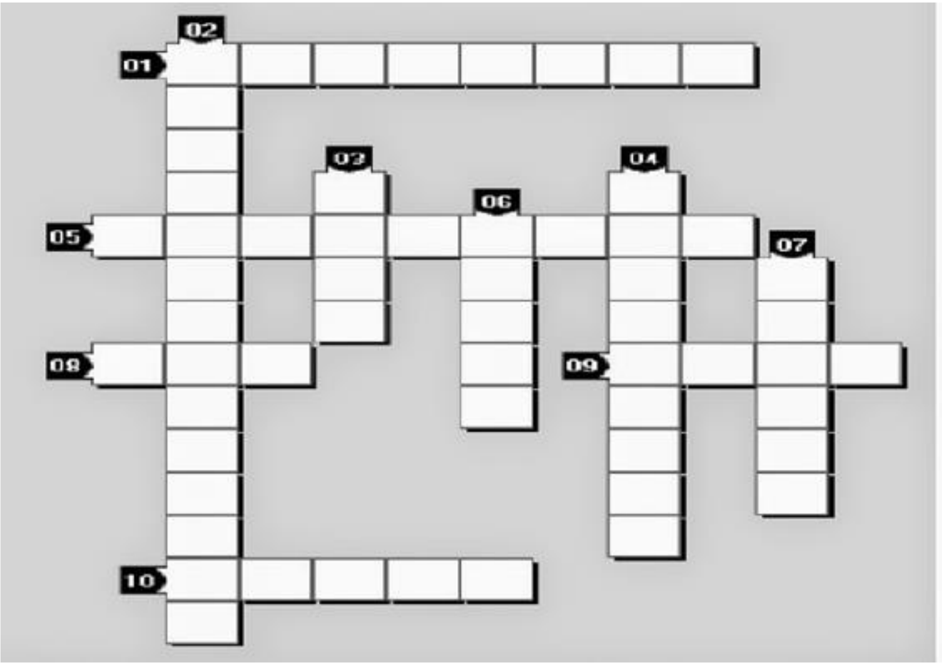
Problema 4: Em uma loja, Carlos comprou 4 camisas e 3 calças e pagou R$ 560,00. No mesmo dia, Maria comprou 1 camisa e 3 calças iguais às de Carlos e desembolsou R$ 410,00 no total. Sabendo que não houve alteração de preço nesse dia, qual o preço de 1 camisa e de 1 calça?

Sistemas para o uso do Geogebra.

As instruções serão dadas em aula.

$I)\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ $II)\begin{cases} 3x + 2y = 16 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$ $III)\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases}$ $IV)\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 6x + 2y = 8 \end{cases}$

Cruzadinha:



01) O triplo de um número, menos vinte e cinco, é igual ao próprio número, mais cinquenta e cinco. Qual esse número?

02) A idade de um pai é igual ao triplo da idade de seu filho. Calcule a idade do pai sabendo que os dois juntos tem sessenta anos.

03) A soma de um número com seu triplo é igual a quarenta e oito. Qual número é esse?

04) O dobro de um número, somado com quinze, é igual a quarenta e nove. Qual é esse número?

05) O triplo de um número, mais dois é igual ao próprio número menos quatro. Qual é esse número?

06) Num estacionamento há carros e motos, totalizando setenta e oito veículos, o número de carro é igual a cinco vezes o numero de motos. Quantas motos há nesse estacionamento?

07) Somando cinco anos ao dobro da idade de Cíntia, obtemos trinta e cinco. Qual a idade de Cíntia?

08) Um número mais a sua metade é igual a quinze. Qual é esse número?

09) O quadruplo de um número, diminuído de dez, é igual ao dobro desse número somado com dois. Qual é esse número?

10) O dobro de um número, diminuído de quatro, é igual a esse número aumentado de um. Qual é esse número?

Exercícios:

1- (Unioeste-2020) Em uma lanchonete, registrou-se o consumo de 3 mesas, como mostra o quadro abaixo. Considerando que há preços únicos para cada tipo de produto da lanchonete e sabendo-se que o consumo total da mesa 2 foi de R$25,00 e na mesa 3 foi de R$70,00, então é **CORRETO** afirmar que:

	Produto		
Mesa	Café	Misto quente	Pão de queijo
1	6	3	8
2	3	2	4
3	9	5	12

a) O preço unitário do misto quente é R$ 4,50.

b) É possível determinar o valor do consumo total na mesa 1.

c) É possível determinar o preço unitário de todos os produtos.

d) É possível concluir que o preço do café é mais caro que o do pão de queijo.

e) O problema consiste em um sistema de equações lineares que não possui nenhuma solução.

2- (Unioeste-2019) José precisa pesar três peças de metal A, B e C. Mas, a balança que ele dispõe não é precisa para pesos menores do que 1kg. José decide então pesar as peças de duas em duas. A e B juntas pesam 1600g, B e C juntas pesam 1400g e A e C juntas pesam 1700g. Nestas condições, qual o peso da peça mais leve?

a) 550g. b) 650g. c) 700g. d) 950g e) 1400g.

3- (ENEM-2009) Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R$ 7,00. De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas?

a) R$ 14,00. b) R$ 17,00. c) R$ 22,00. d) R$ 32,00. e) R$ 57,00.

4- (PUC-Campinas SP/2017) Na equação $7x - 5 = 5.(x + 9) - 28$, o equilíbrio (a igualdade) se estabelece entre os dois membros na presença de um valor determinado de x, usualmente chamado de solução da equação. Atribuindo a x, não o valor que corresponde à solução da equação, mas um valor 6 unidades menor que a solução dessa equação, obtém-se uma diferença numérica entre os dois membros da equação original, que, em valor absoluto, é igual a

a) 17 b) 23 c) 5 d) 12 e) 0

5- Um edifício tem a numeração dos andares iniciando no térreo (7), e continuando com primeiro, segundo terceiro, ..., até o último andar. Uma criança entrou no elevador e, tocando no painel, seguiu uma sequência de andares, parando, abrindo e fechando a porta em diversos andares. A partir de onde entrou a criança, o elevador subiu sete andares, em seguida desceu dez, desceu mais treze, subiu nove, desceu quatro e parou no quinto andar, finalizando a sequência. Considere que, no trajeto seguido pela criança, o elevador parou uma vez no último andar do edifício. De acordo com as informações dadas, o último andar do edifício é o:

a) 16º b)22º c)23º d)25º e) 32º

8.4 RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS.

Problema 1: Os 10 bombons da balança têm o mesmo peso. Quantos gramas ”pesa” cada um?

Resolução: $8x = 2x + 300$

$$8x - 2x = 2x - 2x + 300$$

$$6x = 300$$

$$\frac{1}{6}\,6x = 300.\frac{1}{6} \Rightarrow x = 50$$

Problema 2: A figura abaixo mostra parte de uma cidade e as setas indicam o fluxo de veículos que entram ou saem em determinada rua. Todos os veículos que entraram nesta área da cidade, saíram. Qual o valor de x?

Resolução: carros que entraram $380 + 540 + 450 + 470 = 1840$ carros que saíram da cidade $430 + 420 + 400 + x = 1250 + x$. Sabemos que todos os carros que entraram saíram então

$$1840 = 1250 + x$$

$$1840 - 1250 = 1250 - 1250 + x$$

$$590 = x$$

Problema 3: Vamos considerar que as figuras representadas a seguir têm perímetro iguais:

a) qual equação do 1° grau que representa esse fato?

Resolução:$x + x + 8 + 8 = y + y + y + y = \ 2x + 16 = 4y$

b) se você atribuir um valor de 380 m para o perímetro, qual a medida x e y das figuras?

$$2x + 16 = 380$$

$$2x + 16 - 16 = 380 - 16$$

$$2x = 364$$

$$\frac{1}{2}2x = 364\frac{1}{2}$$

$$x = 182$$

Problema 4: Em uma loja, Carlos comprou 4 camisas e 3 calças e pagou R$ 560,00. No mesmo dia, Maria comprou 1 camisa e 3 calças iguais às de Carlos e desembolsou R$ 410,00 no total. Sabendo que não houve alteração de preço nesse dia, qual o preço de 1 camisa e de 1 calça?

Resolução: seja

x = camisas

y = calças

$$\begin{cases} 4x + 3y = 560 \\ 1x + 3y = 410 \end{cases}$$

Método da substituição:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 560 \\ x + 3y = 410 \end{cases}$$

1° passo: isolar a incógnita de uma das equações.

$$x = 410 - 3y$$

2° passo: substituir na primeira equação.

$$4(410 - 3y) + 3y = 560$$

3° passo: encontrar a raiz da equação.

$$1\,640 - 12y + 3y = 560$$

$$-9y = -1\,080$$

$$y = 120$$

4° passo: substituir y na segunda equação.

$$\mathrm{x} = 410 - 3\mathrm{y}$$

$$\mathrm{x} = 410 - 3 \cdot 120$$

$$\mathrm{x} = 410 - 360$$

$$x = 50$$

Método da adição:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 560 \\ x + 3y = 410 \end{cases}$$

1° passo: multiplique a segunda equação por -1.

$$-x - 3y = -410$$

2° passo: some a primeira equação com a segunda.

$$4x + 3y + (-x - 3y) = 560 + (-410)$$

$$3x = 150$$

$$x = 50$$

3° passo: substituir x na primeira equação.

$$4\,x + 3y = 560$$

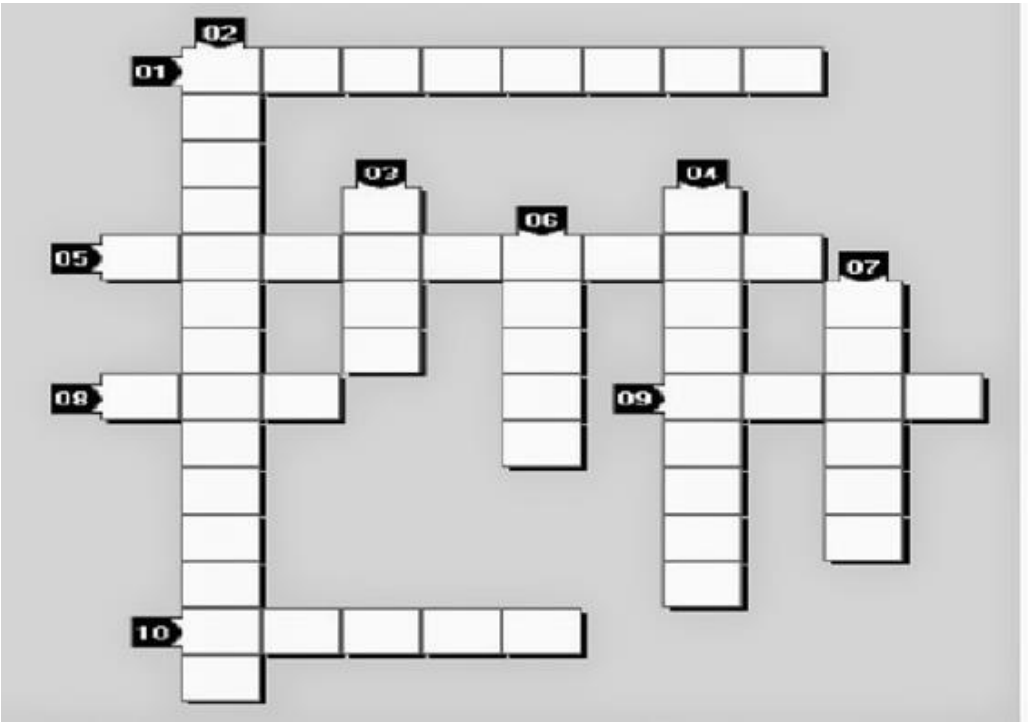
$$4 \cdot 50 + 3y = 560$$

$$200 + 3y = 560$$

$$3y = 360$$

$$y = 120$$

Cruzadinha:



01) O triplo de um número, menos vinte e cinco, é igual ao próprio número, mais cinquenta e cinco. Qual esse número?

Resolução: $3x - 25 = x + 55$

$$x = 40$$

02) A idade de um pai é igual ao triplo da idade de seu filho. Calcule a idade do pai sabendo que os dois juntos tem sessenta anos.

Resolução: tome x como sendo a idade do pai, e y a idade do filho. $\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 60 \end{cases}$

Metódo da substituição: $3y + y = 60$

$$y = 15$$

Substituindo na primeira equação:

$$x = 3.15$$

$$x = 45$$

03) A soma de um número com seu triplo é igual a quarenta e oito. Qual número é esse?

Resolução:$x + 3x = 48$

$$x = 12$$

04) O dobro de um número, somado com quinze, é igual a quarenta e nove. Qual é esse número?

Resolução: $2x + 15 = 49$

$$x = 17$$

05) O triplo de um número, mais dois é igual ao próprio número menos quatro. Qual é esse número?

Resolução: $3x + 2 = x - 4$

$$x = -2$$

06) Num estacionamento há carros e motos, totalizando setenta e oito veículos, o número de carro é igual a cinco vezes o número de motos. Quantas motos há nesse estacionamento?

Resolução: seja x = carros, e y = moto

$\begin{cases} x + y = 78 \\ x = 5y \end{cases}$ resolver usando substituição: $5y + y = 78$

$$6y = 78$$

$$y = 13$$

Substituindo na segunda equação: $x = 5.13$

$$x = 65$$

07) Somando cinco anos ao dobro da idade de Cíntia, obtemos trinta e cinco. Qual a idade de Cíntia?

Resolução: $5 + 2x = 35$

$$x = 15$$

08) Um número mais a sua metade é igual a quinze. Qual é esse número?

Resolução: $x + \frac{x}{2} = 15$

$$\frac{3x}{2} = 15$$

$$3x = 30$$

$$x = 10$$

09) O quádruplo de um número, diminuído de dez, é igual ao dobro desse número somado com dois. Qual é esse número?

Resolução: $4x - 10 = 2x + 2$

$$x = 6$$

10) O dobro de um número, diminuído de quatro, é igual a esse número aumentado de um. Qual é esse número?

Resolução: $2x - 4 = x + 1$

$$x = 5$$

Exercícios:

1- (Unioeste-2020) Em uma lanchonete, registrou-se o consumo de 3 mesas, como mostra o quadro abaixo. Considerando que há preços únicos para cada tipo de produto da lanchonete e sabendo-se que o consumo total da mesa 2 foi de R$25,00 e na mesa 3 foi de R$70,00, então é **CORRETO** afirmar que:

	Produto		
Mesa	**Café**	**Misto quente**	**Pão de queijo**
1	6	3	8
2	3	2	4
3	9	5	12

a) O preço unitário do misto quente é R$ 4,50.
b) É possível determinar o valor do consumo total na mesa 1.
c) É possível determinar o preço unitário de todos os produtos.
d) É possível concluir que o preço do café é mais caro que o do pão de queijo.
e) O problema consiste em um sistema de equações lineares que não possui nenhuma solução.

Resolução: seja c = café, m = misto quente e p = pão de queijo. Assim a equação que corresponde ao consumo da mesa 1 é: $6c + 3m + 8p = v$ o consumo da mesa 2 é: $3c + 2m + 4p = 25$. E por fim o consumo da mesa 3 é: $9c + 5m + 12p = 70$.

Disso chegamos a um sistema linear: $\begin{cases} 6c + 3m + 8p = v \\ 3c + 2m + 4p = 25 \\ 9c + 5m + 12p = 70 \end{cases}$

Subtraindo 3 de 2 obtemos: $9c + 5m + 12p - (3c + 2m + 4p) = 70 - 25$

$$9c - 3c + 5m - 2m + 12p - 4p = 45$$

$$6c + 3m + 8p = 45$$

Podemos obter o valor gasto pela mesa 1, assim alternativa b)

2- (Unioeste-2019) José precisa pesar três peças de metal A, B e C. Mas, a balança que ele dispõe não é precisa para pesos menores do que 1kg. José decide então pesar as peças de duas em duas. A e B juntas pesam 1600g, B e C juntas pesam 1400g e A e C juntas pesam 1700g. Nestas condições, qual o peso da peça mais leve?

a) 550g b) 650g c) 700g d) 950g e) 1400g

Resolução: $\begin{cases} A + B = 1600 \\ B + C = 1400 \\ A + C = 1700 \end{cases}$

Isolando A na primeira equação obtemos:$A = 1600 - B$

Isolando A na terceira equação: $A = 1700 - C$

Igualando obtemos: $1600 - B = 1700 - C$

$$-B + C = 1700 - 1600$$

$$C - B = 100$$

Sabemos que $B + C = 1400 \; e \; C - B = 100$ assim, $B = 1400 - C$

$$C - (1400 - C) = 100$$

$$2C = 100 + 1400$$

$$C = 750$$

Voltando: $A = 1700 - 750$

$$A = 950$$

Para descobrir B:$950 = 1600 - B$

$$950 - 1600 = -B$$

$$-650 = -b$$

$$650 = B$$

Assim B é a peça de metal mais leve pesando 650g alternativa b).

3- (ENEM-2009) Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R$ 7,00. De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas?

a) R$ 14,00 b) R$ 17,00 c) R$ 22,00 d) R$ 32,00 e) R$ 57,00

Resolução:

De acordo com o enunciado da questão, 50 pessoas já haviam pagado sua parte da despesa total, por isso não consideraremos o valor total para elas, apenas o valor de R$ 7,00 adicional, que deverá ser multiplicado por 50 pessoas. Além desse pessoal, outros cinco juntaram-se ao grupo e precisam pagar sua parte, um valor que não conhecemos e, portanto, podemos identificar como **x**. Somando-se o valor que essas pessoas pagarão ao valor acrescentado ao restante do grupo, teremos um recolhimento de R$ 510,00. Podemos então montar uma equação do 1° grau:

$$(50 \cdot 7) + (5 \cdot x) = 510$$

$$350 + 5x = 510$$

$$5x = 510 - 350$$

$$5x = 160$$

$$x = 32$$

Portanto, cada um pagou o valor total de R$ 32,00. Logo, a alternativa correta é a letra d).

4- (PUC-Campinas SP/2017) Na equação $7x - 5 = 5.(x + 9) - 28$, o equilíbrio (a igualdade) se estabelece entre os dois membros na presença de um valor determinado de x, usualmente chamado de solução da equação. Atribuindo a x, não o valor que corresponde à solução da equação, mas um valor 6 unidades menor que a solução dessa equação, obtém-se uma diferença numérica entre os dois membros da equação original, que, em valor absoluto, é igual a

a) 17 b) 23 c) 5 d) 12 e) 0

Resolução:

Primeiro devemos encontrar o valor x que é a resolução dessa equação.

$$7x - 5 = 5.(x + 9) - 28$$

$$7x - 5 = 5x + 45 - 28$$

$$7x - 5 = 5x + 17$$

$$7x - 5x = 17 + 55$$

$$2x = 22$$

$$x = 11$$

Para terminar a resolução, vamos substituir 11-6 no primeiro membro da equação:

$$7x - 5 =$$

$$7.5 - 5 =$$

$$35 - 5 =$$

$$30$$

Em seguida substiruir 11-6 no segundo membro da equação:

$$5.(x + 9) - 28 =$$

$$5.(5 + 9) - 28 =$$

$$5.14 - 28 =$$

$$42$$

42-30=12 alternativa d).

5- Um edifício tem a numeração dos andares iniciando no térreo (7), e continuando com primeiro, segundo terceiro, ..., até o último andar. Uma criança entrou no elevador e, tocando no painel, seguiu uma sequência de andares, parando, abrindo e fechando a porta em diversos andares. A partir de onde entrou a criança, o elevador subiu sete andares, em seguida desceu dez, desceu mais treze, subiu nove, desceu quatro e parou no quinto andar, finalizando a sequência. Considere que, no trajeto seguido pela criança, o elevador parou uma vez no último andar do edifício. De acordo com as informações dadas, o último andar do edifício é o:

a) 16º b)22º c)23º d)25º e) 32º

Resolução: suponha que a criança esteja no andar x e que o térreo seja o ponto 0.

$$X + 7 - 10 - 13 + 9 - 4 = 5$$

$$x - 11 = 5$$

$$x - 11 + 11 = 5 + 11$$

$$x = 16$$

Descobrindo assim em qual andar a criança entrou no elevador. A sequência de andares então foi: 16, 23, 13, 0, 9, 5. Ou seja, o último andar é o 23°, alternativa c).

9. ENCONTRO 5.

9.1 PLANO DE AULA 5 – 02/03/2022.

Conteúdo: Função afim.

Público-alvo: Alunos oriundos da 3° série do ensino médio da rede pública estadual do Paraná.

Objetivo geral: Compreender o conceito de função, identificando suas variáveis e leis de formação**.**

Objetivos específicos:

- Construir tabelas correspondentes a uma função;
- Construir gráficos de funções constantes, do 1º grau com ou sem o auxílio de softwares de geometria dinâmica;
- Representar uma função por seu gráfico no plano cartesiano;
- Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

Tempo de execução: 3 horas e 40 minutos.

Recursos didáticos: Quadro, giz, um copo cilíndrico (proveta graduada) por grupo, bolinhas de gude, régua, água e lâminas.

Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos a aula retomando a lista do encontro anterior, solucionaremos os exercícios nos quais houve dúvida juntamente com os alunos sempre questionando os sobre os passos de resolução. **(10-15min)**.

Em seguida falaremos para os alunos o que será desenvolvido no decorrer da manhã, depois será proposto o seguinte problema.

Problema 1: Na Gincana Cultural escolar anual, as equipes participantes deveriam realizar uma prova que consistia em descobrir o número de bolinhas de gude necessárias para fazer com que o nível da água de um copo cilíndrico, parcialmente cheio, chegasse ao topo sem que transbordasse. A organização da gincana, por sugestão do professor de matemática, definiu que seria fornecido as equipes provetas graduadas com 100 mL de altura, com nível de água em 70mL e 8 bolinhas de gude idênticas. As equipes deveriam ir colocando as bolinhas uma a uma, registrando os níveis da água e, em alguns instantes dizer a quantidade de bolinhas necessárias. Venceria a equipe que respondesse corretamente e, em menos tempo. Se você estivesse participando da gincana, conseguiria ajudar sua equipe a prever essa quantidade?

Após a problematização iniciaremos o momento do experimento, os materiais necessários serão entregues aos grupos com a instrução de colocar água no copo cilíndrico até que atinja 8 cm. Serão questionados com a seguinte pergunta: *Ao colocar as bolinhas de gude idênticas dentro do copo, o que acontecerá com o nível da água?* espera-se que respondam de forma intuitiva que o nível da água deve subir à medida que adicionarem mais bolinhas. Antes de dar início ao experimento será solicitado que os alunos construam uma tabela no caderno e que posteriormente preencham-na com os resultados obtidos. **(30-40min)**

Tabela 9 função afim.

Quantidade de bolinhas	Nível de água em centímetros (cm)
1	73
2	76
3	79
4	82
5	85
6	88
7	91
8	94

Solicitaremos que os alunos respondam os seguintes questionamentos:

1- Analisando a tabela, existe alguma regularidade nos níveis encontrados? Explique.

2- É possível termos níveis iguais para quantidades diferentes de bolinhas na proveta sem que haja alteração no volume inicial de água?

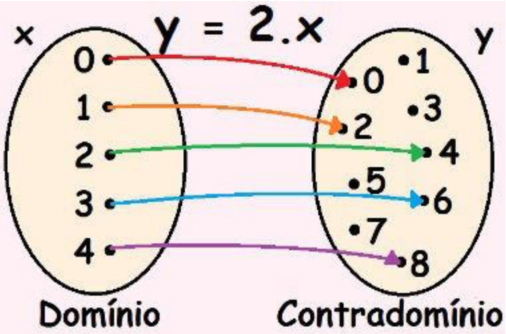
3- Do que depende a elevação ou a queda do nível da água?

Com esses questionamentos espera-se que os alunos percebam uma regularidade, que o nível de água sobe de maneira constante à medida que as bolinhas são colocadas no copo (percebam a relação de dependência entre as variáveis e a influência do volume inicial de água). Com o item 2 espera-se que consigam perceber a definição de função, para cada elemento do primeiro conjunto (bolinhas de gude) existe um e somente um valor correspondente no outro conjunto (altura do nível de água). Deixaremos alguns minutos para que pensem em uma lei de formação a fim de resolver o problema inicial que era determinar a quantidade de bolinhas necessárias para encher o tubo sem transbordar, não daremos uma solução, prosseguiremos com o conteúdo e depois retomaremos esse exercício. **(5-10min)**

Apresentaremos uma definição formal para função afim:

Considerando dois conjuntos A e B, não vazios, dizemos que f é função de A em B quando cada elemento x de A está associado a um único elemento y do conjunto B. indicamos $f: A \rightarrow B$.

Figura 21 diagrama.



Fonte< https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-funcao.htm>

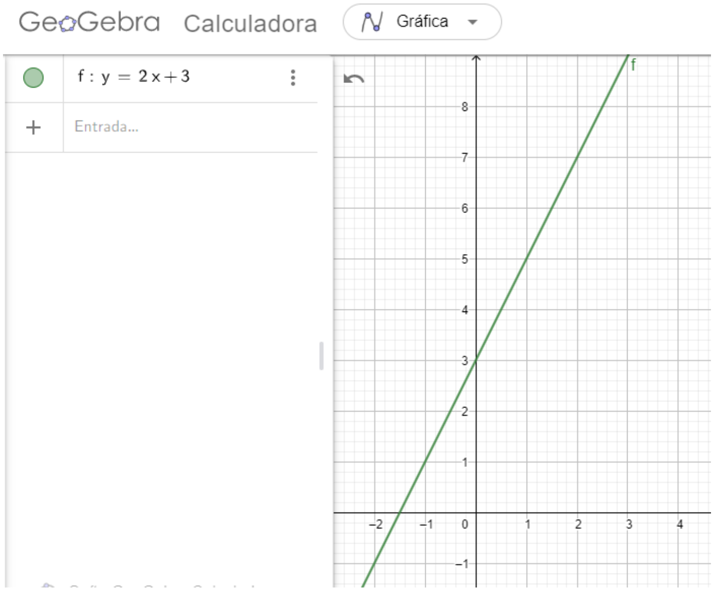
Uma função $f: R \rightarrow R$ em que $f(x) = ax + b$, com a e b reais, é chamada de função afim.

O valor de *a* é identificado como taxa de variação (crescimento/decrescimento) ou de coeficiente angular porque aponta o quanto a função pode crescer ou decrescer e a inclinação da reta em relação ao eixo da abscissa (x) no plano cartesiano.

Já o termo *b*, que é constante ou a condição inicial, é identificado como coeficiente linear da função porque define o ponto onde a reta corta o eixo y do gráfico quando x = 0.

Gráfico da função afim:

Gráfico 1 função afim.



Fonte: produção das autoras (2022).

O gráfico de uma função afim é sempre uma reta;

O gráfico de uma função polinomial do 1° grau intercepta o eixo das abcissas uma única vez.

(10-15min)

Retornaremos para o problema proposto no início da aula e determinaremos um gráfico utilizando os pontos da tabela. Os alunos receberão uma folha quadriculada e posteriormente usarão o Geogebra, já que o aplicativo foi explorado no encontro anterior. **(10-15 min)**

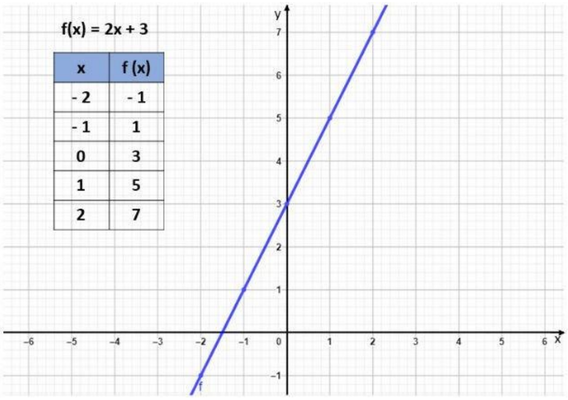
A partir da determinação do gráfico da primeira atividade, vamos responder o questionamento deixado anteriormente e, abordar como determinamos a lei de formação de uma função, conhecendo seu gráfico. Primeiramente questionaremos os alunos se alguém conseguiu determinar a lei de formação do primeiro problema, caso houver alguma resposta afirmativa, solicitaremos que compartilhem com a turma. **(5-10min)**

Em seguida anunciaremos que, de modo geral, o coeficiente angular de uma função afim é obtido da seguinte maneira:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Solicitaremos então que encontrem a lei de formação do seguinte gráfico.

Gráfico 2 lei de formação.



Fonte: das autoras (2022).

(5 min)

Logo após solicitaremos que resolvam o exercício um da lista. Ao concluir o tempo estipulado, realizaremos a correção conjunta na lousa. **(5 min)**

Com o intuito de abordar raízes de uma função, pediremos que os alunos solucionem o exercício dois da lista, para o qual será necessário obter a raiz da função. **(5 min).**

Na sequência escreveremos uma definição formal de raiz de uma função.

Raiz de uma função é todo número x cuja imagem é nula, isto é, f(x) = 0. Ou seja, o ponto que a reta cruza o eixo das abscissas.

Retornaremos o problema inicial da aula e o exercício anterior, a fim de determinar quais são as raízes das funções encontradas. **(5 min)**

Por fim o restante da aula nos dedicaremos a lista de exercícios.

Avaliação: A avaliação será de maneira contínua, observando a participação dos alunos durante o desenvolvimento da aula, principalmente na atividade inicial do experimento, e a resolução da lista proposta.

Referências:

BARROSO, Juliana. Projeto Araribá: Matemática. Vol 4. São Paulo: Moderna, 2006.

EXERCÍCIOS FUNÇÃO AFIM DO ENEM. Disponível em: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/funcao-afim. Acesso em: 24 mar. 2022.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Conjuntos. Funções. Vol 1. 8 ed. São Paulo: Atual, 2013.

QUESTÕES DE VESTIBULAR SOBRE FUNÇÃO AFIM. Disponível em: https://soexercicios.com.br/plataforma/questoes-de-vestibular/ENEM/23525/-funcao-de-primeiro-grau-/1. Acesso em: 24 mar.2022.

QUESTÕES DO ENEM SOBRE FUNÇÃO AFIM. Disponível em: https://www.vestibulandoweb.com.br/educacao/matematica/questoes-enem-funcao-afim/. Acesso em: 25 mar. 2022.

QUESTÕES DO ENEM SOBRE FUNÇÕES. Disponível em: https://www.qconcursos.com/questoes-do-enem/disciplinas/matematica-matematica/funcao-de-1-grau-ou-funcao-afim-problemas-com-equacao-e-inequacoes/questoes. Acesso em: 24 mar. 2022.

9.2 RELATÓRIO AULA 5.

Ao dia dois do mês de abril do ano de 2022, realizamos o quinto encontro do Promat– Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática, nas dependências da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste, no bloco A, sala 104. Nesse encontro, os conteúdos abordados foram equações e sistemas lineares. Antes da chegada dos alunos, deixamos a sala organizada com 6 grupos de 4 carteiras cada.

Demos início ao nosso encontro às 8 horas, retomando a lista deixada na aula anterior. Fizemos a resolução detalhada de um exercício que ficou em aberto no encontro anterior após questionamentos de um dos participantes. Utilizamos o Geogebra como ferramenta durante a explicação.

Logo em seguida organizamos os alunos que estavam sozinhos em grupos, explicando que faríamos um experimento, por isso a necessidade de se agruparem. Distribuímos uma garrafinha de água, uma proveta e 8 bolinhas de gude por grupo. Projetamos a situação problema a ser resolvida, e então orientamos os participantes a iniciarem o experimento o qual consistia em: encher a proveta até 70 mL em seguida acrescentar as bolinhas uma a uma registrando todas as informações em uma tabela, com o objetivo de determinar quantas bolinhas seriam necessárias para encher sem transbordar. Notamos uma participação ativa dos alunos durante toda a experimentação, todos do grupo se envolveram e anotaram todos os resultados, após concluir essa etapa realizamos alguns questionamentos e houve grande participação dos alunos novamente, e todos os grupos identificaram que seriam necessárias nove bolinhas para encher a proveta sem transbordar.

Solicitamos em seguida que os alunos construíssem um gráfico da quantidade de água em razão ao número de bolinhas, a partir dos resultados obtidos, entregamos uma folha quadriculada e explicamos no quadro como é feita a construção de um gráfico em um plano cartesiano. Ao andar entre as mesas percebemos que, mesmo após a explicação no quadro, uma aluna construiu o gráfico invertido, colocando a quantidade de água como o eixo das abscissas e o número de bolinhas como o eixo das ordenadas. Relembramos com ela a explicação feita no quadro, ela logo identificou o que estava errado e, se corrigiu sozinha. Após esse momento realizamos a chamada constatando que havia 21 alunos presentes.

Abordamos então de maneira formal o que é uma função afim. Alguns alunos já haviam identificado o conteúdo da aula e havia mencionado durante a construção do gráfico na etapa anterior. Após identificar uma função afim, pedirmos que retornassem no gráfico obtido através do experimento e tentassem identificar qual seria a lei de formação daquela função. Alguns alunos determinaram com facilidade e auxiliaram os demais colegas do grupo, não determinamos se o que eles haviam feito estava certo ou errado apenas deixamos um tempo para que pensassem. Logo em seguida liberamos todos para o intervalo de 20 minutos.

Seguimos o encontro abordando o conteúdo de funções, e definimos de modo geral como encontramos a lei de formação a partir de pontos em um gráfico, ou informações em uma tabela. Verificamos junto com os alunos se a lei de formação proposta por eles estava correta, e então questionamos se a partir dessa lei de formação encontrada eles manteriam a resposta de que nove bolinhas seriam suficientes para encher sem transbordar. A maioria disse que não seriam nove, mas sim dez. Explicamos que por se tratar de um experimento estávamos sujeitos a erros, e que por isso encontramos uma divergência quanto a essa resposta.

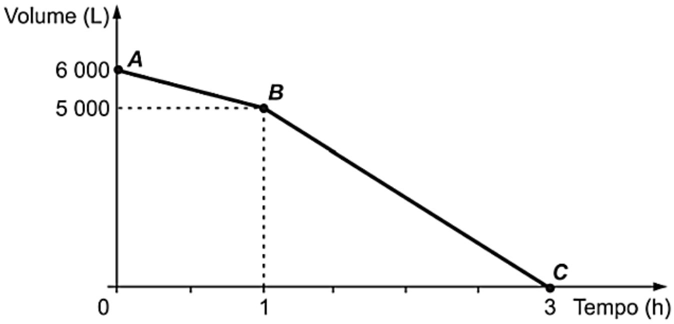
Logo em seguida, solicitamos que encontrassem a lei de formação de um gráfico desenhado no quadro. Na resolução uma aluna aceitou ir ao quadro e resolver o exercício. Deixamos então uns minutos para que resolvessem os exercícios um e dois da lista preparada para esse encontro. O primeiro consistia em determinar a lei de formação a partir de um gráfico que representava a vazão de duas bombas de água, e o segundo em determinar o ponto que igualava as duas funções, para resolver esse último; um aluno se voluntariou para ir ao quadro.

Por fim, deixamos os minutos finais para a resolução da lista. No entanto, antes de explicarmos que os dois sábados seguintes não teríamos aula, um por conta do recesso acadêmico da Unioeste, e no outro por ser recesso letivo (Sábado de Aleluia), para o primeiro sábado mencionamos que seria disponibilizado um vídeo para um encontro assíncrono.

9.3 MATERIAL ENTREGUE.

Lista de exercícios sobre Função Afim

1. (ENEM-2016) Uma cisterna de 6 000 L foi esvaziada em um período de 3h. Na primeira hora foi utilizada apenas uma bomba, mas nas duas horas seguintes, a fim de reduzir o tempo de esvaziamento, outra bomba foi ligada junto com a primeira. O gráfico, formado por dois segmentos de reta, mostra o volume de água presente na cisterna, em função do tempo.



Qual é a vazão, em litro por hora, da bomba que foi ligada no início da segunda hora?

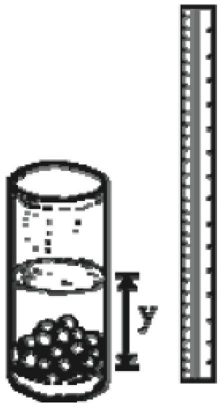
a)1000 b)1250 c)1500 d)2000 e)2500

2. (ENEM-2012) As curvas de oferta e de demanda de um produto representam, respectivamente, as quantidades que vendedores e consumidores estão dispostos a comercializar em função do preço do produto. Em alguns casos, essas curvas podem ser representadas por retas. Suponha que as quantidades de oferta e de demanda de um produto sejam, respectivamente, representadas pelas equações: $Q_O = -20 + 4P$, $Q_D = 46 - 2P$ em que Q_O é quantidade de oferta, Q_D é a quantidade de demanda e P é o preço do produto. A partir dessas equações, de oferta e de demanda, os economistas encontram o preço de equilíbrio de mercado, ou seja, quando Q_O e Q_D se igualam. Para a situação descrita, qual o valor do preço de equilíbrio?

a) 5 b) 11 c) 13 d) 23 e) 33

3. (ENEM- 2009) Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme

ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.
O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.



número de bolas (x)	**nível da água (y)**
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x)?

a) $y = 30x$ b) $y = 25x + 20{,}2$ c) $y = 1{,}27x$
d) $y = 0{,}7x$ e) $y = 0{,}07x + 6$

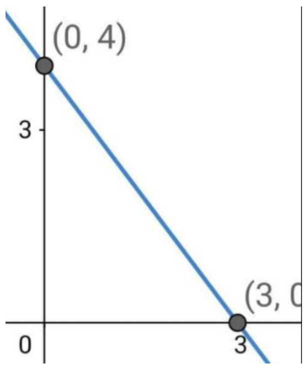
4. (ENEM - 2020) Por muitos anos, o Brasil tem figurado no cenário mundial entre os maiores produtores e exportadores de soja. Entre os anos de 2010 e 2014, houve uma forte tendência de aumento da produtividade, porém, um aspecto dificultou esse avanço: o alto custo do imposto ao produtor, associado ao baixo preço de venda do produto. Em média, um produtor gastava R$ 1 200,00 por hectare plantado, e vendia por R$ 50,00 cada saca de 60 kg. Ciente desses valores, um produtor pode, em certo ano, determinar uma relação do lucro L que obteve em função das sacas de 60 kg vendidas. Suponha que ele plantou 10 hectares de soja em sua propriedade, na qual colheu x sacas de 60 kg e todas as sacas foram vendidas.

Disponível em: www.cnpso.embrapa.br. Acesso em: 27 fev. 2012 (adaptado).

Qual é a expressão que determinou o lucro L em função de x obtido por esse produtor nesse ano?
Alternativas:
a) $L(x) = 50x - 1\,200$ b) $L(x) = 50x - 12\,000$ c) $L(x) = 50x + 12\,000$
d) $L(x) = 500x - 1\,200$ e) $L(x) = 1\,200x - 500$

5. (Enem Digital 2020) Uma microempresa especializou-se em produzir um tipo de chaveiro personalizado para brindes. O custo de produção de cada unidade é de R$ 0,42 e são comercializados em pacotes com 400 chaveiros, que são vendidos por R$ 280,00. Além disso, essa empresa tem um custo mensal fixo de R$ 12.800,00 que não depende do número de chaveiros produzidos.
Qual é o número mínimo de pacotes de chaveiros que devem ser vendidos mensalmente para que essa microempresa não tenha prejuízo no mês?
a) 26 b) 46 c) 109 d) 114 e) 115

6. A função que tem o gráfico ao lado é definida por:



$a)\ f(x) = \frac{-4x}{3} + 4$

b) $f(x) = \frac{-3x}{4} + 4$

c) $f(x) = 4x$

d) $f(x) = \frac{4x}{3} - 4$

7.Sejam a e b dois números reais com a ≠ b. Se $f(x) = (b - a)x + a$, então:
a) $f(0) = b$ b) $f(2) = 2b - a$ c)$f(1) = a$
d) $f(2) = 2a - b$ e) $f(1) = b - 2$

9.4 RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS.

1. (ENEM-2016) Uma cisterna de $6000\,L$ foi esvaziada em um período de 3h. Na primeira hora foi utilizada apenas uma bomba, mas nas duas horas seguintes, a fim de reduzir o tempo de esvaziamento, outra bomba foi ligada junto com a primeira. O gráfico, formado por dois segmentos de reta, mostra o volume de água presente na cisterna, em função do tempo.
Qual é a vazão, em litro por hora, da bomba que foi ligada no início da segunda hora?
a) 1000 b) 1250 c) 1500 d) 2000 e) 2500
Resolução: Primeiro encontraremos a vazão da primeira bomba. Analisando o gráfico, no primeiro caso, houve uma vazão de $1000\,L$ em uma hora, logo a vazão é de $1000\,L/h$. Quando a segunda bomba é ligada, podemos observar que, em 2 horas, foram retirados $5000\,L$ do reservatório, então a vazão foi de $5000 \div 2 = 2500\,L/h$.

Retirando a vazão da bomba anterior, temos que: $2500 - 1000 = 1500\ L/h$. Alternativa c).

2. (ENEM-2012) As curvas de oferta e de demanda de um produto representam, respectivamente, as quantidades que vendedores e consumidores estão dispostos a comercializar em função do preço do produto. Em alguns casos, essas curvas podem ser representadas por retas. Suponha que as quantidades de oferta e de demanda de um produto sejam, respectivamente, representadas pelas equações: Qo = –20 + 4P QD = 46 – 2P em que QO é quantidade de oferta, QD é a quantidade de demanda e P é o preço do produto. A partir dessas equações, de oferta e de demanda, os economistas encontram o preço de equilíbrio de mercado, ou seja, quando QO e QD se igualam. Para a situação descrita, qual o valor do preço de equilíbrio?

a) 5　　b) 11　　c) 13　　d) 23　　e) 33

Resolução: Conforme descrito na questão, o preço de equilíbrio é encontrado igualando-se as funções quantidade demandada (Q_D) e quantidade ofertada (Q_O). Assim, $46 - 2P = -20 + 4P$. Consequentemente $6P = 66$. Logo $P = 11$, sendo P o preço de equilíbrio. Alternativa b).

3.(ENEM- 2009) Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.

O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x)?

a) y = 30x　　b) y = 25x + 20,2　　c) y = 1,27x

d) y = 0,7x　　e) y = 0,07x + 6

Resolução: O nível de água (y) em função do número de bolas (x)é dado por $y = ax + b$. Da tabela, podemos dizer que: para $x = 5, y = 6{,}35$, e para $x = 10, y = 6{,}70$. Com isso, obtemos o sistema de equação abaixo: $\begin{cases} 5a + b = 6{,}35 \\ 10a + b = 6{,}70 \end{cases}$. Resolvendo o sistema acima, obtemos $a = 0{,}07\ e\ b = 6$. Logo, $y = 0{,}07 + 6$.

4. (ENEM - 2020) Por muitos anos, o Brasil tem figurado no cenário mundial entre os maiores produtores e exportadores de soja. Entre os anos de 2010 e 2014, houve uma forte tendência de aumento da produtividade, porém, um aspecto dificultou esse avanço: o alto custo do imposto ao produtor associado ao baixo preço de venda do produto. Em média, um produtor gastava R$ 1 200,00 por hectare plantado, e vendia por R$ 50,00 cada saca de 60 kg. Ciente desses valores, um produtor pode, em certo ano, determinar uma relação do lucro L que obteve em função das sacas de 60 kg vendidas. Suponha que ele plantou 10 hectares de soja em sua propriedade, na qual colheu x sacas de 60 kg e todas as sacas foram vendidas.

Qual é a expressão que determinou o lucro L em função de x obtido por esse produtor nesse ano?

Alternativas:

a) L(x) = 50x – 1200 b) L(x) = 50x – 12 000 c) L(x) = 50x + 12 000

d) L(x) = 500x – 1200 e) L(x) = 1 200x – 500

Resolução: Temos que o produtor gasta R$ 1 200,00 por hectare plantado, como plantou 10 hectares, ele terá um gasto de $1200 \cdot 10 = 12000$ reais. Como ele vende cada saca por R$ 50,00 cada, se ele vender x sacas então terá lucro de $50 \cdot x$. Assim, a função que representa o lucro em função de x sacas colhidas será $L(x) = 50x - 12000$, alternativa b).

5. (Enem Digital 2020) Uma microempresa especializou-se em produzir um tipo de chaveiro personalizado para brindes. O custo de produção de cada unidade é de R$ 0,42 e são comercializados em pacotes com 400 chaveiros, que são vendidos por R$ 280,00. Além disso, essa empresa tem um custo mensal fixo de R$ 12.800,00 que não depende do número de chaveiros produzidos.

Qual é o número mínimo de pacotes de chaveiros que devem ser vendidos mensalmente para que essa microempresa não tenha prejuízo no mês?

a) 26 b) 46 c) 109 d) 114 e) 115

Resolução: Uma forma de resolver esse problema é montar a função que representa o lucro da empresa. Temos que o custo de produção de cada unidade de chaveiro é de R$ 0,42. Como cada pacote tem 400 chaveiros, teremos uma despesa por pacote de $0{,}42 \cdot 400 = 168$ reais. Se for vendido x pacotes, então terá uma despesa de $168x$ reais. Além disso, a empresa vende cada pacote por R$ 280,00, logo se vender x pacotes terá um lucro de $280x$ reais. Sabemos ainda que ela tem um gasto fixo mensal de 12800 reais, sendo assim teremos que o lucro em função da quantidade de pacotes vendido será dada pela soma das despesas diminuída do lucro, ou seja, $L(x) = 280x - 168x - 12800 = 112x - 12800$. Como o problema quer o número mínimo de pacotes que precisa ser vendido para que a empresa não tenha despesas, basta calcularmos quando pacotes devem ser vendidos e o lucro seja zero, assim, o que venderem a mais já não terão prejuízo. Portanto teremos: $0 = 112x - 12800 \Rightarrow 12800 = 112x \Rightarrow \frac{12800}{112} = x \Rightarrow x = 114{,}28$. Observemos que ele precisa vender mais que 114 pacotes para não ter prejuízo, por isso deverá vender no mínimo 115 pacotes para isso. Logo alternativa d).

6.A função que tem o gráfico ao lado é definida por:

$a)$ $f(x) = \frac{-4x}{3} + 4$ b) $f(x) = \frac{-3x}{4} + 4$ c) $f(x) = 4x$

d) $f(x) = \frac{4x}{3} - 4$

Resolução: $a = \frac{y2-y1}{x2-x1} \Rightarrow \frac{4-0}{0-3} \Rightarrow \frac{-4}{3}$.

Quando $y = 0, x = 3$. Sabemos que $y = ax + b \Rightarrow 0 = a.3 + 4 \Rightarrow a = \frac{-4}{3}$.

7.Sejam a e b dois números reais com a ≠ b. Se $f(x) = (b - a)x + a$, então:

a) $f(0) = b$ b) $f(2) = 2b - a$ c) $f(1) = a$ d) $f(2) = 2a - b$

e) $f(1) = b - 2a$

Resolução: $f(2) = (b - a)2 + a = 2b - 2a + a = 2b - a$. Alternativa b).

10. ENCONTRO 6.

10.1 PLANO DE AULA 6 – 09/04/2022

Conteúdo: Polinômios; produtos notáveis e fatoração; equações; sistemas lineares.

Público-alvo: alunos oriundos da 3° série do ensino médio da rede pública estadual do Paraná**.**

Objetivo geral: Revisar os conteúdos dos encontros anteriores.

Objetivos específicos:

- Revisar o conteúdo de polinômios utilizando jogos;
- Interpretar e traduzir situações problema para a linguagem matemática;
- Fatorar as expressões algébricas, utilizando termos em evidência.

Tempo de execução: 30 minutos.

Recursos didáticos: lâminas, *notebook*, jogos *online,* gravador de tela.

Encaminhamento metodológico:

O encontro seis acontecerá de forma assíncrona, faremos uma revisão dos pontos que geraram mais dúvidas nos encontros anteriores, bem como disponibilizaremos alguns jogos *online* como forma de revisão.

Iniciaremos a aula retomando algumas propriedades de radiciação com lâminas; logo em seguida disponibilizaremos um *link* de acesso para um jogo *online* que abordará alguns conceitos a respeito do tema. **(10 min)**

A fatoração de polinômios também será abordada novamente, pois percebemos a necessidade dos alunos em rever o conteúdo. A revisão será em lâminas, e posteriormente com a disponibilização de um jogo virtual, no qual os alunos precisarão efetuar fatoração de polinômios para responder corretamente os questionamentos. **(10-15min)**

Por fim, com o objetivo de rever equações, novamente disponibilizaremos um jogo, no qual os alunos precisarão encontrar as raízes de equações ou escrever algebricamente uma situação antes de solucioná-la. Explicaremos como cada jogo funciona realizando uma rodada como exemplo.

Avaliação: como critério de avaliação, solicitaremos que os alunos tragam no próximo encontro presencial a solução dos últimos quatro problemas do jogo de radiciação e os exercícios de fatoração também do jogo disponibilizado.

Referências:

Atividade Avaliativa - Equações do 1º Grau. Disponível em: https://wordwall.net/pt/resource/30369819/atividade-avaliativa-equa%C3%A7%C3%B5es-do-1%C2%BA-grau. Acesso em: 31.mar.2022.

Aula de Praticas Experimentais em Matemática (Radiciação). Disponível em:https://wordwall.net/pt/resource/16175981/aula-de-praticas-experimentais-em-matem%C3%A1tica-radicia%C3%A7%C3%A3o. Acesso em: 31.mar.2022.

Fatoração. Disponível em: https://wordwall.net/pt/resource/19328676/fatora%C3%A7%C3%A3o. Acesso em: 31.mar.2022.

IEZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática Elementar**:** Complexos, Polinômios e Equações. Vol 6, 8 ed. São Paulo: Atual, 2013.

10.2 RELATÓRIO 6.

Aos nove dias do mês de abril do ano de 2022, realizamos o sexto encontro do Promat– Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática, no formato assíncrono, por meio de uma videoaula disponibilizada através de um *link* do *YouTube*. Nesse encontro, fizemos uma revisão dos conteúdos já abordados até o momento, com enfoque nas propriedades de radiciação, fatoração e equações.

Fizemos a exposição da nossa aula, por meio de uma apresentação construída no *Microsoft PowerPoint*, nela conseguimos apresentar passo a passo a resolução de cada propriedade trabalhada e usar a caneta virtual do aplicativo, para escrever durante a nossa fala. Usamos o aplicativo "Gravador de tela", para gravar a tela e a nossa voz enquanto explicávamos, e depois usamos o aplicativo "FilmForth: Editor de vídeo" para compilar os vídeos.

O vídeo completo teve duração de 29 minutos e 34 segundos, intitulado Promat 2022 Encontro 6, disponibilizado em nosso canal do *YouTube*, sendo que apenas quem tivesse acesso ao *link* poderia ter acesso ao vídeo. Manter a privacidade era interessante portanto o enviamos no grupo de *WhatsApp* criado nos primeiros encontros do programa. Além disso, disponibilizamos na descrição do vídeo os *links* de acesso aos jogos propostos aos alunos. Demoramos aproximadamente uma semana para montar toda a aula.

10.3 MATERIAL UTILIZADO.

REVISÃO: RADICIAÇÃO.

- A radiciação é a operação inversa da potenciação. Podemos escrever como:

$$\sqrt[n]{a} = b$$

$\sqrt[n]{a}$ raiz enésima de a.

$\sqrt{\ }$ radical.

n índice da raiz.

a= radicando.

b= raiz.

- Como você faria para determinar as raízes a seguir?
- $\sqrt{16} =$ $\sqrt{81} =$ $\sqrt{225} =$ $\sqrt{625} =$ $\sqrt{729} =$

PROPRIEDADES.

Resolva as seguintes raízes:

• $\sqrt{4^2}$ $\sqrt{6^2}$ $\sqrt[3]{2^3}$ $\sqrt[4]{3^4}$ $\sqrt[n]{4^n}$

•**Propriedade 1.**

A raiz enésima de um número elevado a n é igual a esse mesmo número.

PROPRIEDADES.

Resolva as seguintes raízes:

• $\sqrt{\sqrt{16}}$ $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

• **Propriedade 2.**

Raiz de outra raiz. Basta conservar o radicando e multiplicar os índices das raízes.

PROPRIEDADES.

Resolva as seguintes operações.

- $5^{\frac{2}{3}} =$ $\quad 2^{\frac{2}{3}} =$ $\quad 7^{\frac{3}{4}} =$ $\quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

- **Propriedade 3.**

Potência de expoente radical. O numerador da fração passa a ser o expoente do radicando, e o denominador passa a ser o índice da raiz.

PROPRIEDADES.

Resolva as operações a seguir.

- $\sqrt{3}.\sqrt{3} =$ $\quad \sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{9} =$ $\quad \sqrt[3]{34}\sqrt[3]{2} =$ $\quad \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$

- **Propriedade 4.**

Produto de raízes com índices iguais. O produto entre duas raízes com índices iguais é igual à raiz de mesmo índice do produto dos radicandos.

PROPRIEDADES.

Resolva as radiciações a seguir.

- $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} =$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{9}} =$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}} =$ $\qquad$ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

- **Propriedade 5.**

Quociente de raízes com índices iguais. A divisão entre duas raízes de índices iguais é igual à raiz de mesmo índice da divisão dos quocientes.

Link do jogo na descrição

FATORAÇÃO

- Fator comum em evidência: Usamos esse tipo de fatoração, quando existir um fator que se repete em todos os termos do polinômio.

Por exemplo: $3x^2 + 6x^3 + 9x^4$

Temos fator comum?

$$3x\ (x + 2x^2 + 3x^3)$$

$$3x\ x\ (1 + 2x + 3x^2)$$

Ainda temos fator comum?

Então temos:

$$3x^2(1 + 2x + 3x^2)$$

Uma forma de verificar se está correto é fazer a distributiva, se resultar no polinômio inicial estará correto.

FATORAÇÃO

- Fatoração por agrupamento: é utilizada quando não há um fator comum a todos os termos do polinômio.

Por exemplo: $bx - 2b + x - 2$

$$x\ (b + 1) - 2\ (b + 1)$$

Temos x comum a bx e x.
Também 2 comum a - 2b e -2

$$(b + 1) \cdot (x - 2)$$

Temos agora, b + 1 comum a x(b+1) e -2(b+1).

Novamente uma forma de verificar se está correto é fazer a distributiva, se resultar no polinômio inicial estará correto.

FATORAÇÃO

- Trinômio quadrado perfeito: retoma a ideia dos produtos notáveis, onde fatorar é o seu caminho inverso.

Por exemplo: $x^2 + 18x + 81$

Temos dois fatores que possuem raiz quadrada exata?

$\sqrt{x^2}$ $\sqrt{81}$

$(x + 9)^2$

Para verificar se a resposta está correta, devemos resolver esse quadrado da soma (já visto em aula). Se resultar no polinômio inicial estará correto.

FATORAÇÃO

- Diferença entre dois quadrados:

Por exemplo: $25x^2 - 100$

Tiraremos a raiz quadrada de cada um dos seus termos

$\sqrt{25x^2}$ $\sqrt{100}$

$5x$ 10

$(5x + 10)\ (5x - 10)$

Como é a diferença dos quadrados, basta reescrever esse polinômio como o produto da soma pela diferença das raízes encontradas

Para saber se está certo, basta fazer a distributiva.

Link do jogo na descrição

Link do jogo na descrição

11. ENCONTRO 7.

11.1 PLANO DE AULA 7 – 23/04/2022

Conteúdo: Função quadrática; resolução da equação do segundo grau.

Público-alvo: 3ª série do ensino médio.

Objetivo geral: Compreender funções e resolver equações do 2° grau.

Objetivos específicos:

- Construir gráficos de funções constantes, do 2º grau com e sem o auxílio de *softwares* de geometria dinâmica.
- Representar uma função por seu gráfico no plano cartesiano.
- Obter as coordenadas do vértice de uma função do 2º grau de caso simples.
- Reconhecer o vértice e a concavidade de uma parábola.

Tempo de execução: 3 h 40 min.

Recursos didáticos: Quadro, giz, apagador, material impresso, barbante, régua, *software Geogebra*,

Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos a aula acolhendo os alunos novamente, já que passamos dois sábados consecutivos sem nos encontrarmos presencialmente. Questionaremos como foi a experiência com o encontro remoto e em seguida recolheremos a atividade proposta no vídeo. Retomaremos brevemente o último encontro presencial que aconteceu no dia dois de abril, perguntando se há alguma dúvida a respeito da lista. **(15 min)**.

Em seguida iniciaremos o encontro entregando a lista de exercícios e solicitando que pensem no primeiro problema, juntamente com seu grupo. Disponibilizaremos o barbante já no comprimento de 60 cm com o objetivo de auxiliar na resolução do problema, o problema é de autoria do professor Aroldo Alves, o link de acesso está nas referências.

Problema 1: Determinado fazendeiro pretende construir uma cerca em formato retangular utilizando 60 metros lineares de cerca. Quais medidas desse retângulo irão tornar a área cercada a maior possível?

Deixaremos um tempo para que pensem em possíveis soluções para o problema. Com o intuito de orientar a resolução, colocaremos algumas questões:

1) Escreva a função que mostra a área do cercado *A(x)* variando de acordo com a medida do comprimento de um dos seus lados *x*.

2) A partir da função encontrada, complete a tabela com valores para os lados do cercado e respectivas áreas. Para cada situação, construa com o barbante o resultado equivalente. (para maximizar o espaço na folha de impressão, vamos construir a tabela no quadro e solicitar que façam no caderno). Vamos sugerir também, que pode ser feito o cálculo e anotação a cada 5 unidades de medida.

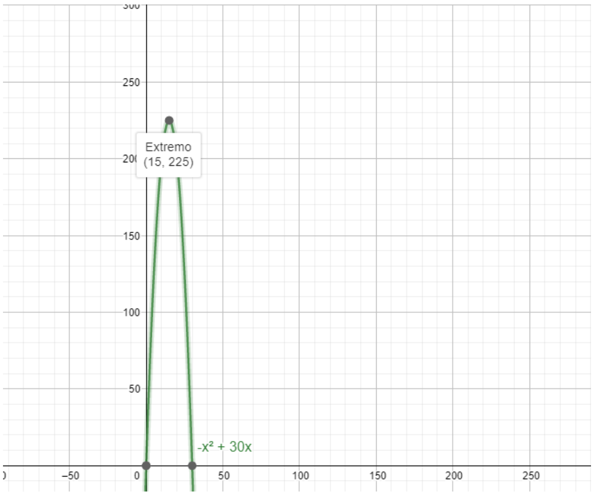
Figura 22 quadro.

x	30-x	A(x)
Comprimento (m)	Largura (m)	Área (m^2)
30	0	0
29	1	29
28	2	56
27	3	81

Fonte: autoras.

3) Desenhe o gráfico da função encontrada na questão 1. Utilize o Geogebra.

Gráfico 3 função do 2° grau.



Fonte: autoras.

4) Qual o valor para *x* que torna a área máxima? Discuta sobre o resultado.

(20 min)

Após o tempo disponibilizado, vamos resolver junto com a turma o problema proposto, e então questionaremos qual conteúdo eles esperam ver neste encontro. **(10 min)**

Posteriormente, faremos uma breve revisão sobre a equação de segundo grau, resolvendo um problema retirado de um livro didático. Relembrar com os alunos a fórmula resolutiva dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Problema 2: Uma loja com 144 m² de área é composta de três ambientes: dois salões de forma quadrada, com x metros de lado, e um corredor retangular, com 1 metro de largura. Qual é o valor de x ?

Durante a resolução, relembraremos quais são os coeficientes a, b e c e usaremos a fórmula citada acima para chegar a solução. **(15 min)**

Apresentaremos então, mais dois exemplos de função de segundo grau;

Situação 1: Um campeonato de futebol vai ser disputado por 10 clubes pelo sistema em que todos jogam contra todos em dois turnos. Vamos verificar quantos jogos serão realizados.

Cada clube jogará "em casa", no seu campo, 9 jogos, como são 10 clubes, o total de jogos será $10 \cdot 9 = 90$.

Se fosse disputado por 20 clubes (como o Campeonato Brasileiro), usando o mesmo raciocínio, teríamos $20 \cdot 19 = 380$ jogos.

Assim, para cada número (x) de clubes, é possível calcular o número (y) de jogos no campeonato:

$y = x(x - 1)$, ou seja, $y = x^2 - x$.

Situação 2: Um time de futebol feminino montou um campo de 100 m de comprimento por 70 m de largura e, por medida de segurança, decidiu cercá-lo, deixando entre o campo e a cerca uma pista com 3 m de largura. Qual é a área do terreno limitado pela cerca?

Figura 23 quadra azul.

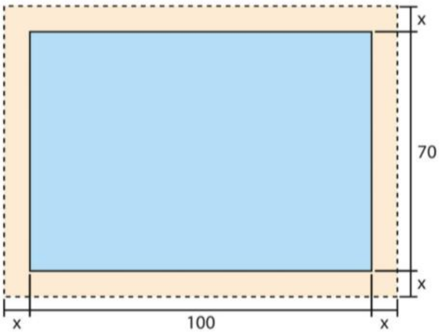
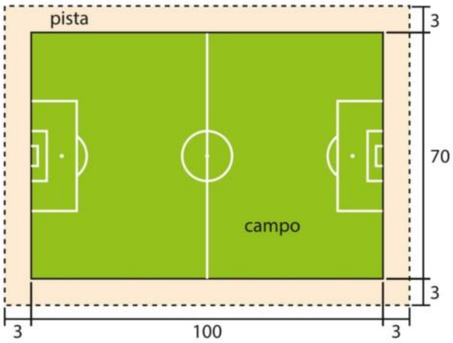


Figura 24 campo.



A área da região cercada é:

$$(100 + 2 \cdot 3) \cdot (70 + 2 \cdot 3) = 106 \cdot 76 = 8056\, m^2$$

Se a largura da pista fosse 4 m, a área da região cercada seria:

$$(100 + 2 \cdot 4) \cdot (70 + 2 \cdot 4) = 108 \cdot 78 = 8424\, m^2$$

Enfim, a cada largura x escolhida para a pista há uma área $A(x)$ da região cercada. A área da região cercada é uma função de x. Procuramos a lei que expressa $A(x)$ em função de x.

$$A(x) = (100 + 2x) \cdot (70 + 2x)$$

$$A(x) = 7000 + 200x + 140x + 4x^2$$

$$A(x) = 4x^2 + 340x + 7000$$

(10 min)

Na sequência, falaremos sobre a definição de função de segundo grau retornando ao problema inicial (problema 1) e, também, as duas situações expostas para interpretar e exemplificar sobre os coeficientes.

Função quadrática: qualquer função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

(10 min)

Então, construiremos com eles no Geogebra, o gráfico de cada função já vistas e mais alguns exemplos, cujo objetivo é que percebam regularidade na concavidade da parábola quando $a > 0$ ou $a < 0$.

Exemplos:

a) $y = -x^2 + 2x - 1$ b) $y = x^2 - 4x + 5$ c) $y = -x^2 + 3x$

Concavidade da parábola:

Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima.

Se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo.

(10 – 15 min)

Na sequência, definiremos raízes da função e retomaremos alguns exemplos para que isso fique claro.

Raízes ou zeros da função: dado um polinômio, são raízes os números reais x tais que$f(x) = 0$. São as abcissas dos pontos em que a parábola intercepta o eixo 0x.

Vamos propor que os alunos encontrem as raízes da função da letra a) dos exemplos usados para analisar o gráfico, ou seja $y = -x^2 + 2x - 1$.

As quantidades de raízes dependem do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4ac$, chamado discriminante:

• Quando Δ é positivo, há duas raízes reais e distintas;

• Quando Δ é zero, há duas raízes reais iguais (ou alguma raiz dupla);

• Quando Δ é negativo, não há raiz real.

Retornaremos aos problemas e exercícios anteriores para praticar quantas raízes terão. Posteriormente solicitaremos que resolvam o exercício 1 da lista.

Falaremos então que para $x = 0$, temos $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$, então (0, c) é o ponto em que a parábola corta o eixo 0y. **(30 min)**

Em seguida falaremos sobre o vértice da parábola dado por:

$$V(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$$

(5 min)

Para a construção da parábola, podemos seguir um roteiro:

- o valor do coeficiente a define a concavidade da parábola.
- as raízes (ou zeros) definem os pontos em que a parábola intercepta o eixo 0x.
- o vértice $V(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ Indica o ponto de mínimo ($se\ a > 0$) ou de máximo ($se\ a < 0$).
- A reta que passa por V e é paralela ao eixo 0y é o eixo de simetria da parábola.
- (0, c) É um ponto em que a parábola corta o eixo 0y.

(10 min)

Após essa explicação abordaremos os exercícios 2, 3, 4 e 5 da lista proposta, nos quais para resolvê-los precisaremos utilizar de alguns itens anteriormente explicado. **(20 min)**

Depois do tempo proposto para solucionar as questões, faremos uma correção no quadro. Novamente pediremos se alguém deseja resolver, caso ninguém se manifeste positivamente, nós mesmas faremos a resolução. **(10 min)**

Em seguida solicitaremos que resolvam os demais exercícios propostos na lista. Caso haja tempo faremos a conferência ainda nesse encontro, caso não haja deixaremos para o próximo. **(30 min)**

Avaliação: os alunos serão avaliados de maneira contínua mediante sua participação ativa na aula, e na resolução dos exercícios propostos.

Referências:

ALVES, Aroldo. Situação problema envolvendo funções quadráticas (funções do 2° grau. Instituto Claro. 2020. Disponível em: https://www.institutoclaro.org.br/educacao/para-ensinar/planos-de-aula/situacao-problema-envolvendo-funcoes-quadraticas-funcoes-do-2o-grau/. Acesso em: 16 abr. 2022.

FUNÇÃO DO 2 GRAU ENEM. Disponível em: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/enem-lista-de-exercicios-sobre-equacao-e-funcao-polinomial-do-2-grau.htm. Acesso em: 20 abr. 2022.

FUNÇÃO DO 2 GRAU OBMEP. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=61&tipo=4. Acesso em: 20 abr. 2022.

IEZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática Elementar: Conjuntos. Funções. Vol 1. 8 ed. São Paulo: Atual, 2013.

JÚNIOR, José R. G; CASTRUCCI, Benedicto. A conquista da matemática 9. 4 ed. São Paulo: FTD, 2018.

PARANÁ. Currículo da Rede Estadual do Paraná (CREP): Matemática. Curitiba: SEED, 2019. Disponível em: https://professor.escoladigital.pr.gov.br/crep. Acesso em: 15 abr. 2022.

11.2 RELATÓRIO AULA 7.

Ao dia 23 do mês de abril do ano de 2022, realizamos o sétimo encontro do Promat– Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática, nas dependências da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste, no bloco A, sala 104. Nesse encontro, os conteúdos abordados foram equações e funções do segundo grau. Antes da chegada dos alunos, deixamos a sala organizada com 6 grupos de 4 carteiras cada.

Acolhemos os alunos e iniciamos o encontro com cinco minutos de atraso, já que estávamos aguardando todos entrarem na sala. Uma aluna nos procurou com uma avaliação da escola solicitando auxílio na compreensão do conteúdo, registramos com foto e nos comprometemos em trazer no encontro seguinte. Logo de início percebemos que nosso público havia diminuído após as duas semanas sem encontro presencial, e depois da chamada constatamos que tínhamos 12 alunos presentes. Apenas uma aluna devolveu a atividade proposta na aula assíncrona, registramos através de foto, e logo em seguida iniciamos o encontro sete.

Entregamos a todos os participantes o material impresso que utilizamos durante todo o encontro, e um pedaço de barbante com 60 cm de comprimento por grupo. Solicitamos que realizassem a leitura do problema um e que posteriormente tentassem solucioná-lo, dizemos que o barbante estava disponível caso quisessem explorar através de um material concreto. O problema consistia em encontrar a área retangular máxima que um fazendeiro conseguiria cercar dispondo de 60 metros de barbante, andamos entre os grupos e percebemos que eles estavam envolvidos na solução, expressando a área em forma de desenhos no caderno. Durante nossa observação nos grupos, percebemos que ninguém considerou o quadrado como sendo um retângulo, já que suas áreas sempre partiam ou terminavam em 14x16, quando questionamos o porquê não usavam 15x15 obtivemos a seguinte resposta “por que aí professora seria um quadrado”. Explicamos então, que sim, todo quadrado é um retângulo, porém recebem um nome especial por possuírem todos os lados iguais, assim que dissemos isso uma aluna se manifestou dizendo “ah então eu estava certa a maior área é quando a largura for 15 metros e o comprimento 15 metros”. Construímos a tabela com os alunos no quadro e juntos determinamos que sim, a maior área era de fato quando meu cercado tivesse as dimensões de um quadrado. Depois determinamos uma função que nos dizia qual seria a área total quando a largura medisse x.

Após concluir o problema um, construímos no Geogebra a função encontrada, e identificamos como encontraríamos o máximo valor da função. Anunciamos então que o conteúdo abordado no encontro de hoje seria função do segundo grau. Com o objetivo de levar os alunos a recordarem a fórmula de resolução de uma equação segundo grau e que posteriormente usaríamos para função do segundo grau, solicitamos que resolvessem o problema dois da lista. Deixamos um tempo e logo em seguida pensamos juntos em uma solução no quadro, percebemos nesse encontro uma maior participação dos alunos nas resoluções. Em seguida fizemos a leitura e explicação das situações um e dois, nas quais se fazia necessária a determinação de funções que expressassem determinadas situações para x vezes.

Definimos então formalmente o que é uma função do segundo grau, e em seguida os alunos foram liberados para o intervalo de 20 minutos. Ao retornarem para sala, com o auxílio do Geogebra, construímos diferentes gráficos incluindo os mencionados anteriormente com o intuito de analisar sua concavidade e qual é a relação com o coeficiente a. Ainda com o auxílio dos gráficos definimos o que são as raízes ou zeros da função, como encontramos e qual a relação com delta calculado durante a resolução.

Explicamos na sequência o que é o vértice de uma parábola, e quando esse vértice é considerado ponto de máximo ou mínimo, também definimos a fórmula utilizada para determinar o vértice. Solicitamos então que retornassem para a lista e resolvessem o exercício um. Deixamos um tempo e em seguida resolvemos juntos, no quadro. O exercício consistia em encontrar as raízes para determinar a solução procurada, um aluno levantou a questão da resolução por soma e produto, ele relatou que possui maior facilidade com essa maneira de resolver; o convidamos para ir até o quadro explicar aos colegas sua maneira de resolver ele prontamente aceitou e demostrou no quadro sua resolução.

Com o objetivo de construir gráficos, agora sem o auxílio da calculadora digital, abordamos o exercício dois. Explicamos como eles usariam o roteiro presente ali fazendo o item a, realizamos o passo a passo no quadro e depois deixamos que fizessem o item b e c sozinhos.

Finalizamos o encontro às 11 h e 40 min com alguns exercícios a serem resolvidos no próximo encontro.

11.3 MATERIAL ENTREGUE.

Lista de exercícios - função do 2° grau.

Problema 1: Determinado fazendeiro pretende construir uma cerca em formato retangular utilizando 60 metros lineares de cerca. Quais medidas desse retângulo irão tornar a área cercada a maior possível?

a) Escreva a função que mostra a área do cercado *A(x)* variando de acordo com a medida do comprimento de um dos seus lados *x*.

b) A partir da função encontrada, complete a tabela com valores para os lados do cercado e respectivas áreas. Para cada situação, construa com o barbante o resultado equivalente.

c) Desenhe o gráfico da função encontrada na questão 1. Utilize o Geogebra.

d) Qual o valor para *x* que torna a área máxima? Discuta sobre o resultado.

Problema 2: Uma loja com 144 m² de área é composta de três ambientes: dois salões de forma quadrada, com x metros de lado, e um corredor retangular, com 1 metro de largura. Qual é o valor de x ?

Situação 1: Um campeonato de futebol vai ser disputado por 10 clubes pelo sistema em que todos jogam contra todos em dois turnos. Vamos verificar quantos jogos serão realizados.

Cada clube jogará “em casa”, no seu campo, 9 jogos, como são 10 clubes, o total de jogos será $10 \cdot 9 = 90$.

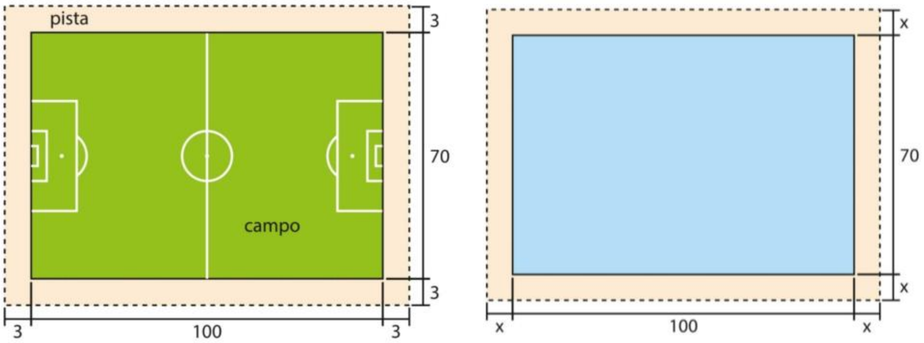
Se fosse disputado por 20 clubes (como o Campeonato Brasileiro), usando o mesmo raciocínio, teríamos $20 \cdot 19 = 380$ jogos.

Assim, para cada número (x) de clubes, é possível calcular o número (y) de jogos no campeonato:

$y = x(x - 1)$, ou seja, $y = x^2 - x$.

Situação 2: Um time de futebol feminino montou um campo de 100 m de comprimento por 70 m de largura e, por medida de segurança, decidiu cercá-lo, deixando entre o campo e a cerca uma pista com 3 m de largura. Qual é a área do terreno limitado pela cerca?

A área da região cercada é:



$$(100 + 2 \cdot 3) \cdot (70 + 2 \cdot 3) = 106 \cdot 76 = 8056\, m^2$$

Se a largura da pista fosse 4 m, a área da região cercada seria:

$$(100 + 2 \cdot 4) \cdot (70 + 2 \cdot 4) = 108 \cdot 78 = 8424\, m^2$$

Enfim, a cada largura x escolhida para a pista há uma área $A(x)$ da região cercada. A área da região cercada é uma função de x. Procuramos a lei que expressa $A(x)$ em função de x.

$$A(x) = (100 + 2x) \cdot (70 + 2x)$$

$$A(x) = 7000 + 200x + 140x + 4x^2$$

$$A(x) = 4x^2 + 340x + 7000$$

1-(IFSC 2017) Pedro é pecuarista e, com o aumento da criação, ele terá que fazer um novo cercado para acomodar seus animais. Sabendo-se que ele terá que utilizar 5 voltas de arame farpado e que o cercado tem forma retangular cujas dimensões são as raízes da equação $x^2 - 45x + 500 = 0$, qual a quantidade mínima de arame que Pedro terá que comprar para fazer esse cercado.

a) 545 m b) 225 m c) 200 m d) 500 m e) 450 m

2- (OBMEP) Construa o gráfico, determine as raízes, o vértice e os pontos de interseção com eixo das ordenadas das seguintes funções:

Para a construção da parábola, podemos seguir um roteiro:
• O valor do coeficiente a define a concavidade da parábola.
• As raízes (ou zeros) definem os pontos em que a parábola intercepta o eixo 0x.
• O vértice $V(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ Indica o ponto de mínimo ($se\ a > 0$) ou de máximo ($se\ a < 0$).
• A reta que passa por V e é paralela ao eixo 0y é o eixo de simetria da parábola.
• (0, c) é o ponto em que a parábola corta o eixo 0y.

a) $y = x^2 - 5x + 4$

b) $y = -x^2 - 6x + 16$

c) $y = x^2 + 4x$

d) Analise os gráficos das alternativas anteriores e determine os respectivos eixos de simetria em cada parábola.

3-(UEL) A função real f, de variável real, dada por $f(x) = -x^2 + 12x + 20$, tem um valor:

a) mínimo, igual a -16, para x = 6.

b) mínimo, igual a 16, para x = -12.

c) máximo, igual a 56, para x = 6.

d) máximo, igual a 72, para x = 12.

4-(Enem 2017 | Libras) O morro onde estão situadas as emissoras de TV em Porto Alegre pode ser representado graficamente, com algum prejuízo, em um sistema cartesiano, através de uma função polinomial de grau 2 da forma $y = ax^2 + bx + c$, com a base da montanha no eixo das abscissas.

Para que fique mais adequado essa representação, devemos ter:

a) a > 0 e $b^2 – 4ac > 0$

b) a > 0 e $b^2 – 4ac < 0$

c) a < 0 e $b^2 – 4ac < 0$

d) a < 0 e $b^2 – 4ac > 0$

e) a < 0 e $b^2 – 4ac = 0$

5-(Enem 2013) Uma pequena fábrica vende seus bonés em pacotes com quantidades de unidades variáveis. O lucro obtido é dado pela expressão $L(x) = -x^2 + 12x - 20$, onde x representa a quantidade de bonés contidos no pacote. A empresa pretende fazer um único tipo de empacotamento, obtendo um lucro máximo.

Para obter o lucro máximo nas vendas, os pacotes devem conter uma quantidade de bonés igual a:

a) 4 b) 6 c) 9 d) 10 e) 14

6-(ENEM-2020) Uma empresa de chocolates consultou o gerente de produção e verificou que existem cinco tipos diferentes de barras de chocolate que podem ser produzidas, com os seguintes preços no mercado:

- Barra I: R$ 2,00;
- Barra II: R$ 3,50;
- Barra III: R$ 4,00;
- Barra IV: R$ 7,00;
- Barra V: R$ 8,00.

Analisando as tendências do mercado, que incluem a quantidade vendida e a procura pelos consumidores, o gerente de vendas da empresa verificou que o lucro L com a venda de barras de chocolate é expresso pela função $L(x) = -x^2 + 14x - 45$, em que x representa o preço da barra de chocolate. A empresa decide investir na fabricação da barra de chocolate cujo preço praticado no mercado renderá o maior lucro. Nessas condições, a empresa deverá investir na produção da barra

a) I b) II c) III d) IV e) V

7-(ENEM-2016) Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número *f* de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$ (em que *t* é expresso em dia e *t* = 0 é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia. A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1 600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer. A segunda dedetização começou no

a) 19° dia b) 20° dia c) 29° dia d) 30° dia e) 60° dia

8-(ENEM-2013) A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento (t = 0) e varia de acordo com a expressão$T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$, com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39°C. Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a poda possa ser aberta?

a) 19,0 b) 19,8 c) 20,0 d) 38,0 e) 39,0

11.4 RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS.

Problema 1: Determinado fazendeiro pretende construir uma cerca em formato retangular utilizando 60 metros lineares de cerca. Quais medidas desse retângulo irão tornar a área cercada a maior possível?

a) Escreva a função que mostra a área do cercado *A(x)* variando de acordo com a medida do comprimento de um dos seus lados *x*.

Resolução: $A(x) = -x^2 + 30x$. Considerando que um dos lados mede x, o outro lado deve medir $30 - x$. Multiplicando um lado pelo outro encontra-se a função procurada.

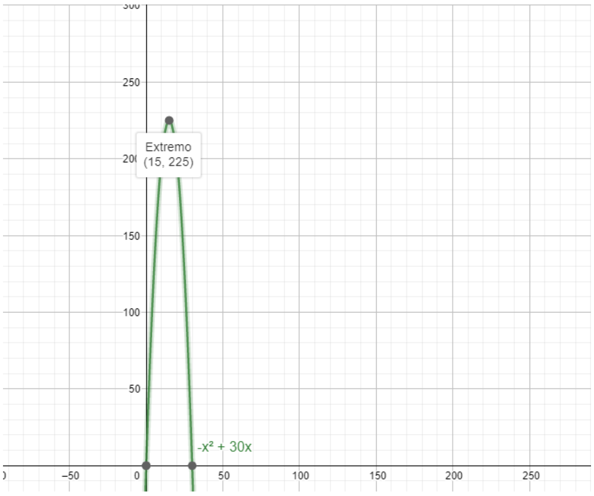
b) A partir da função encontrada, complete a tabela com valores para os lados do cercado e respectivas áreas. Para cada situação, construa com o barbante o resultado equivalente.

Tabela 10 medidas.

X	30-X	A(x)
Comprimento (m)	Largura (m)	Área (m^2)
30	0	0
25	5	125
20	10	200
15	15	225

10	20	200
5	25	125
0	30	0

c) Desenhe o gráfico da função encontrada na questão 1. Utilize o Geogebra.



Fonte: das autoras.

d) Qual o valor para *x* que torna a área máxima? Discuta sobre o resultado.

Resolução: o valor máximo para a área é 225 m^2, quando os lados são 15 m X 15m.

Problema 2: Uma loja com 144 m² de área é composta de três ambientes: dois salões de forma quadrada, com x metros de lado, e um corredor retangular, com 1 metro de largura. Qual é o valor de x ?

Resolução: sabemos que a área total é: 144 m^2, e que é composto de dois salões com x metros de lado que correspondem a uma área de x^2 cada um. E um corredor retangular com 1 metro de largura e 2x de comprimento assim sua área é 1.2x = 2x. Área total da loja $144 \ = \ 3x2 \ + \ x \Rightarrow \ 0 = 2x^2 + 2x - 144$. Para encontrar o valor de x, aplicaremos a fórmula de resolução $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, encontrando $x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4.2.(-144)}}{2.2}$ $\Rightarrow x = \frac{-2 \pm 34}{4} \Rightarrow x' = \frac{-2-34}{4} = -9 \; ou \; x'' = \frac{-2+34}{4} = 8$. Utilizaremos o valor positivo, pois trate-se de uma medida.

1-(IFSC 2017) Pedro é pecuarista e, com o aumento da criação, ele terá que fazer um novo cercado para acomodar seus animais. Sabendo-se que ele terá que utilizar 5 voltas de arame farpado e que o cercado tem forma retangular cujas dimensões são as raízes da equação $x^2 - 45x + 500 = 0$, qual a quantidade mínima de arame que Pedro terá que comprar para fazer esse cercado.

a) 545 m b) 225 m c) 200 m d) 500 m e) 450

Resolução: Queremos encontrar as raízes da equação. Para isso, calcularemos o valor do delta e aplicaremos a fórmula de resolução:

$$x^2 - 45x + 500 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{45 \pm \sqrt{45^2 - 4.1.500}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{45 \pm 5}{2} \Rightarrow x' = \frac{45-5}{2} = 20 \; ou \; x'' = \frac{45+5}{2} = 25.$$

Sabendo que as dimensões são 20 m e 25 m, então o perímetro é de:

$$P = 2 \cdot 20 + 2 \cdot 25 = 40 + 50 = 90$$

Como serão 5 voltas, então a quantidade necessária será de:

$$5 \cdot 90 = 450 \, m$$

Alternativa e).

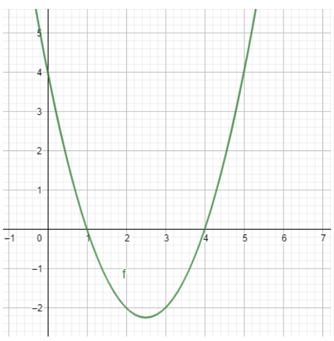
2- (OBMEP) Construa o gráfico, determine as raízes, o vértice e os pontos de interseção com eixo das ordenadas das seguintes funções:

Para a construção da parábola podemos seguir o seguinte roteiro:

- O valor do coeficiente a define a concavidade da parábola.
- As raízes (ou zeros) definem os pontos em que a parábola intercepta o eixo 0x.
- O vértice $V(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ Indica o ponto de mínimo ($se\ a > 0$) ou de máximo ($se\ a < 0$).
- A reta que passa por V e é paralela ao eixo 0y é o eixo de simetria da parábola.
- (0, c) é o ponto em que a parábola corta o eixo 0y.

a) $y = x^2 - 5x + 4$

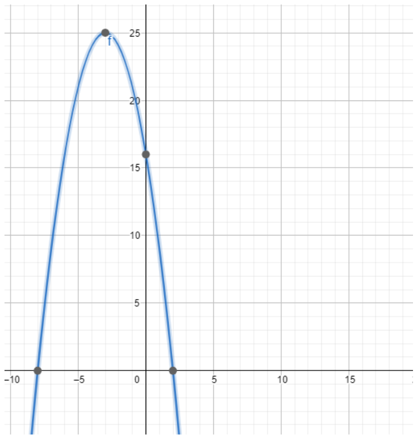
Resolução: Zeros: 1 e 4; Vértice: $Xv = \frac{5}{2}$ e $yV = -\frac{9}{4}$; Intersecção com o eixo das ordenadas: (0; 4)



Fonte das autoras.

b) $y = -x^2 - 6x + 16$

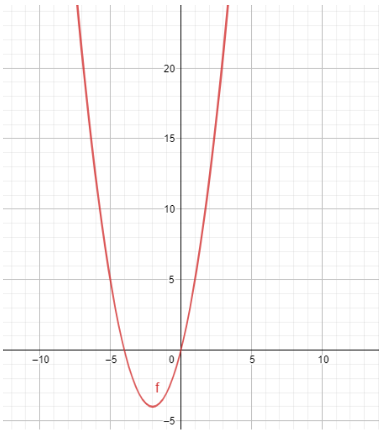
Resolução: Zeros: −8 e 2; Vértice: $x_v = -3$ e $y_v = 25$; Intersecção com o eixo das ordenadas: (0; 16).



Fonte das autoras.

c) $y = x^2 + 4x$

Resolução: Zeros: −4 e 0; Vértice: $x_v = -2$ e $y_v = -4$; Intersecção com o eixo das ordenadas: (0; 0).



Fonte das autoras.

d) Analise os gráficos das alternativas anteriores e determine os respectivos eixos de simetria em cada parábola.

Resolução: Alternativa a) eixo de simetria $x = \frac{5}{2}$. Alternativa a) eixo de simetria $x = -3$. Alternativa a) eixo de simetria $x = -2$.

3-(UEL) A função real f, de variável real, dada por $f(x) = - x^2 + 12x + 20$, tem um valor:

a) mínimo, igual a -16, para x = 6.

b) mínimo, igual a 16, para x = -12.

c) máximo, igual a 56, para x = 6.

d) máximo, igual a 72, para x = 12.

Resolução: Como a = – 1, o gráfico da parábola terá concavidade para baixo, logo o vértice será o máximo da função. Então, para encontrar o vértice, temos que: $a = -1, b = 12 \; e \; c = 20$.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 12^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 20$$

$$\Delta = 144 + 80$$

$$\Delta = 224$$

$$V\left(-\frac{12}{2.(-1)}, -\frac{224}{4.(-1)}\right)$$

$$V(6, 56)$$

Alternativa C.

4-(Enem 2017 | Libras) O morro onde estão situadas as emissoras de TV em Porto Alegre pode ser representado graficamente, com algum prejuízo, em um sistema cartesiano, através de uma função polinomial de grau 2 da forma $y = ax^2 + bx + c$, com a base da montanha no eixo das abscissas.

Para que fique mais adequado essa representação, devemos ter:

a) $a > 0$ e $b^2 - 4ac > 0$

b) $a > 0$ e $b^2 - 4ac < 0$

c) $a < 0$ e $b^2 - 4ac < 0$

d) $a < 0$ e $b^2 - 4ac > 0$

e) $a < 0$ e $b^2 - 4ac = 0$

Resolução: note que a concavidade da parábola é para baixo, assim podemos concluir que $a<0$. Como a base da montanha é o eixo das abscissas e a parábola toca em dois pontos podemos concluir que $b^2 - 4ac > 0$.

Alternativa d).

5-(Enem 2013) Uma pequena fábrica vende seus bonés em pacotes com quantidades de unidades variáveis. O lucro obtido é dado pela expressão $L(x) = -x^2 + 12x - 20$, onde x representa a quantidade de bonés contidos no pacote. A empresa pretende fazer um único tipo de empacotamento, obtendo um lucro máximo.

Para obter o lucro máximo nas vendas, os pacotes devem conter uma quantidade de bonés igual a:

a) 4 b) 6 c) 9 d) 10 e) 14

Resolução: a quantidade máxima de bonés é o ponto X_v, que podemos encontrar: $-\frac{b}{2a}$ $\Rightarrow -\frac{12}{2.(-1)} \Rightarrow 6.$

Alternativa b).

6-(ENEM-2020) Uma empresa de chocolates consultou o gerente de produção e verificou que existem cinco tipos diferentes de barras de chocolate que podem ser produzidas, com os seguintes preços no mercado:

- Barra I: R$ 2,00;
- Barra II: R$ 3,50;
- Barra III: R$ 4,00;
- Barra IV: R$ 7,00;
- Barra V: R$ 8,00.

Analisando as tendências do mercado, que incluem a quantidade vendida e a procura pelos consumidores, o gerente de vendas da empresa verificou que o lucro L com a venda de barras de chocolate é expresso pela função $L(x) = -x^2 + 14x - 45$, em que x representa o preço da barra de chocolate. A empresa decide investir na fabricação da barra de chocolate cujo preço praticado no mercado renderá o maior lucro. Nessas condições, a empresa deverá investir na produção da barra

a) I b) II c) III d) IV e) V

Resolução: a barra I renderá um lucro: $L(2) = -2^2 + 14.2 - 45 = -21.$

A barra II: $L(3{,}5) = -3{,}5^2 + 14.3{,}5 - 45 = -8{,}25.$

A barra III: $L(4) = -4^2 + 14.4 - 45 = -5.$

A barra IV: $L(7) = -7^2 + 14.7 - 45 = 4.$

A barra V: $L(8) = -8^2 + 14.8 - 45 = 3.$

Assim a barra que renderá maior lucro é a barra IV, alternativa d).

7-(ENEM-2016) Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número *f* de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$ (em que *t* é expresso em dia e *t* = 0 é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia. A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1 600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer. A segunda dedetização começou no

a) 19° dia b) 20° dia c) 29° dia d) 30° dia e) 60° dia

Resolução: para encontrar a solução devemos igualar a função com o número total de infectados para assim encontrar a quantidade t de dias. $1600 = -2t^2 + 120t$ $\Rightarrow 0 = -2t^2 + 120t - 1600$. Para encontrar o valor de t vamos usar a fórmula de resolução da função do segundo grau:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-120 \pm \sqrt{120^2 - 4.(-2).(-1600)}}{2.(-2)} \Rightarrow x = \frac{-120 \pm 40}{-4} \Rightarrow x' = \frac{-120 - 40}{-4}$$

$$= 40 \; ou \; x'' = \frac{-120 + 40}{-4} = 20$$

Alternativa b.

8-(ENEM-2013) A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento (t = 0) e varia de acordo com a expressão$T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$, com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39°C. Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a poda possa ser aberta?

a) 19,0 b) 19,8 c) 20,0 d) 38,0 e) 39,0

Resolução: para resolver precisamos igualar a função a temperatura que o forno atinge 39° C e encontrar os possíveis valores de t.

$$39 = -\frac{t^2}{4} + 400 \Rightarrow 0 = -\frac{t^2}{4} + 400 - 39 \Rightarrow 0 = -\frac{t^2}{4} + 361 \Rightarrow \qquad 0 = -\frac{t^2 + 1444}{4}$$

$$\Rightarrow \; 0 = -t^2 + 1444 \Rightarrow -1444 = \; -t^2 \Rightarrow 1444 = t^2 \Rightarrow t = \pm\sqrt{1444} \Rightarrow \; t = \; \pm 38.$$

Como estamos falando em tempo, podemos descartar a parte negativa ficamos então com $t = 38$. Alternativa d).

12. ENCONTRO 8.

12.1 PLANO DE AULA 8 – 30/04/2022

Conteúdo: Geometria: triângulos.

Público-alvo: 3ª série do ensino médio.

Objetivo geral: Construir e relembrar conhecimentos sobre triângulos.

Objetivos específicos:

- Identificar e compreender as características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados;
- Construir triângulos, usando régua e compasso;
- Reconhecer e compreender a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados;
- Compreender e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°;
- Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos;
- Reconhecer e aplicar o teorema de Pitágoras.

Tempo de execução: 3 h 40 min.

Recursos didáticos: Quadro, giz, apagador, material impresso, papel sulfite, compasso, régua e barbante.

Encaminhamento metodológico:

Começaremos a aula acolhendo os alunos. Retomaremos brevemente a lista entregue para eles no dia 23 de abril, perguntando se há alguma dúvida a respeito dela. **(15 min)**

Na sequência, iniciaremos o conteúdo sobre triângulos, falando sobre sua condição de existência, para a qual:

Só irá existir um triângulo se a soma das medidas de dois lados for sempre maior que a medida do terceiro.

Construiremos com régua e compasso triângulos para mostrar essa condição.

Exercício 1- Em cada um dos itens abaixo, determine o número de pontos de interseção dos círculos de raios r_A e r_B centrado nos pontos A e B, respectivamente. a) $AB = 5\ cm,\ r_A = 3\ cm,\ r_B = 4\ cm$ b) $AB = 5\ cm,\ r_A = 3\ cm,\ r_B = 2\ cm$ c) $AB = 5\ cm,\ r_A = 2\ cm,\ r_B = 2\ cm$

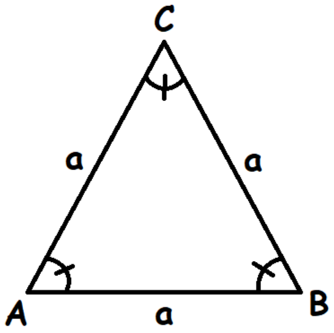
E então passaremos a definição citada acima e mais alguns exemplos para que os alunos analisem a existência do triângulo.

Exercício 2- Nos itens abaixo, decida se existe um triângulo com as medidas dadas. Justifique sua resposta. a) $10\ cm, 15\ cm\ e\ 25\ cm$ b) $31\ cm,\ 33\ cm\ e\ 30\ cm$ c) $40\ cm, 40\ cm\ e\ 45\ cm$

(20 min)

Na sequência, trabalharemos a classificação e as características de cada um deles, deixando os alunos livres para interagirem e comentarem o que lembram sobre o tema.

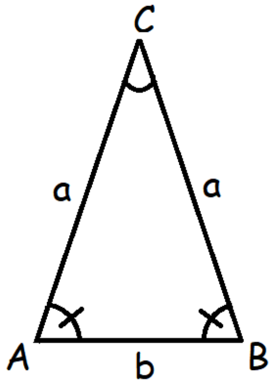
Começaremos falando sobre o triângulo equilátero, desenhando no quadro um exemplo e revisando com os alunos algumas propriedades desse triângulo.



Triângulo equilátero:

- Seus três lados têm medidas iguais.
- Seus três ângulos tem medidas iguais de 60° cada.
- A altura relativa a um de seus lados, divide esse lado em duas partes iguais.

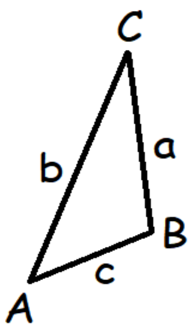
Posteriormente falaremos sobre triângulo isósceles.



Triângulo isósceles

- Tem dois lados iguais (congruentes).
- O lado com medida diferente é geralmente tomado como base.
- Os ângulos da base são iguais (congruentes).
- A altura relativa ao lado não congruente
- A altura relativa ao lado não congruente (b), divide esse lado em duas partes iguais.

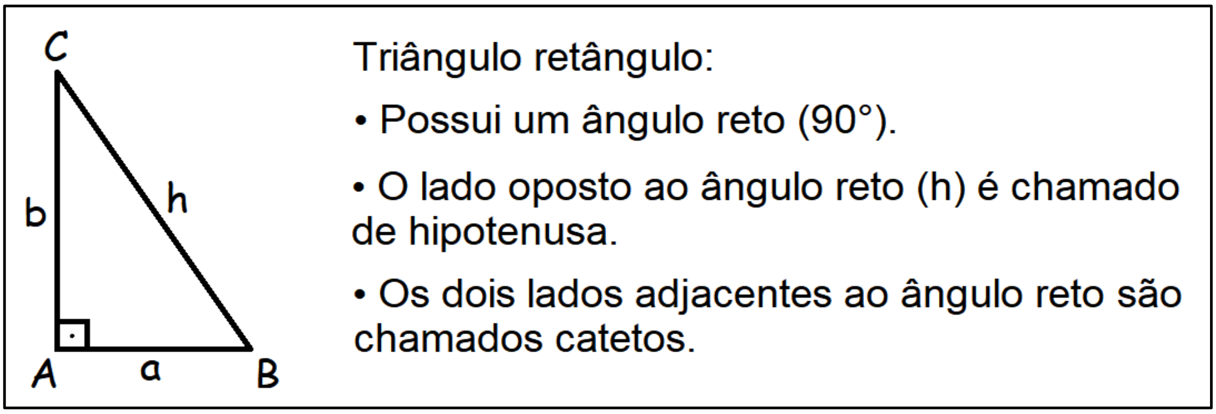
Também sobre triângulo escaleno:



Triângulo escaleno:

- Todos os lados tem medidas diferentes.
- Todos os ângulos tem medidas diferentes.

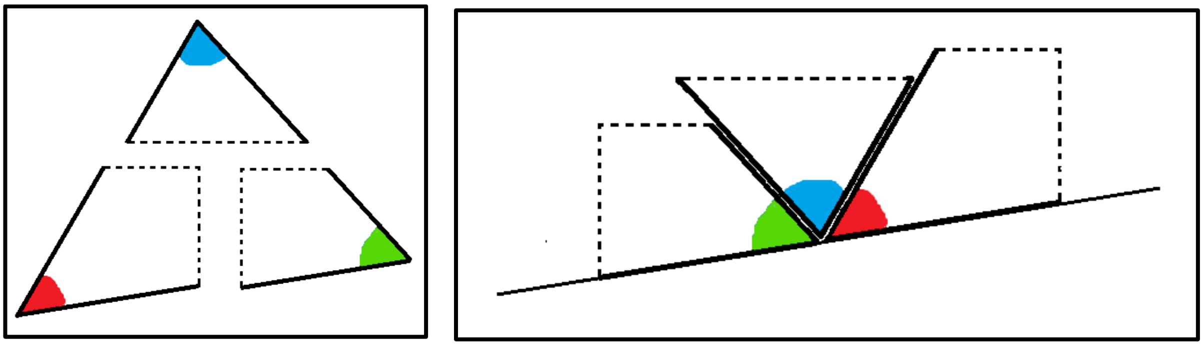
Por fim, falaremos sobre o triângulo retângulo:



(30 min)

Em seguida, trabalharemos com a soma dos ângulos internos de um triângulo. Para isso, faremos uma atividade prática com os alunos. Pediremos que desenhem um triângulo qualquer em uma folha e pintem cada ângulo desse triângulo de uma cor diferente, a fim de identificá-los. Então, solicitaremos que dividam esse triângulo em três partes, de modo que cada uma fique com um ângulo, como por exemplo, na figura 1 a seguir:

Figura 25 ângulos internos.



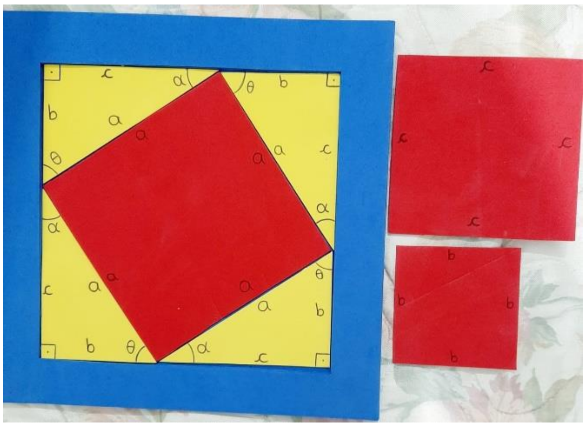
Fonte: das autoras (2022)

Então pediremos que desenhem uma reta suporte no caderno e posicionem/montem os ângulos sobre ela, de modo que eles se completem como na figura 2 acima. Com isso, mostraremos que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°. **(15 min)**

A seguir, falaremos sobre área do triângulo dada por $A = \frac{b \cdot h}{2}$, onde b é a base e h a altura do triângulo. **(5 min)**

Posteriormente, relembraremos o triângulo retângulo já visto no início da aula, enunciaremos o Teorema de Pitágoras, e o demonstraremos usando material produzido durante a graduação.

Figura 26 teorema de Pitágoras.



Fonte: das autoras (2022).

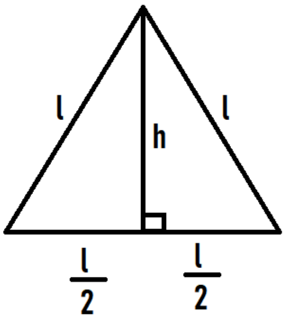
O quadrado de lado formado pela soma dos catetos do triângulo retângulo amarelo, terá área total de $(b+c)^2 = b^2 + 2bc + c^2$. Mostraremos que outra forma de encontrarmos essa área, é somarmos as áreas das figuras formadas no interior do quadrado maior, logo teremos 4 triângulos retângulos amarelos e um quadrado de lado a, vermelho, então teremos $4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} + a^2$, simplificando ficamos com $2bc + a^2$. Agora podemos igualar as áreas, então obtemos $b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2$. Podemos subtrair $2bc$ de ambos os lados, o que nos resultará em $b^2 + c^2 = a^2$, e esta é a representação matemática do Teorema de Pitágoras, que será enunciado na sequência. Deixaremos que os alunos manuseiem o material se for de sua vontade, para que explorem outras formas de analisar geometricamente esse teorema.

Seja em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos.

(30 min)

Posteriormente, conhecendo o Teorema de Pitágoras, encontraremos a altura e a área de um triângulo equilátero qualquer de lado l.

Figura 27 triângulo equilátero.



Fonte: das autoras (2022).

Dado um triângulo equilátero de lado l, e altura h, usando o Teorema de Pitágoras, teremos que:

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 = l^2$$

$$\frac{l^2}{4} + h^2 = l^2$$

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3l^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}}$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Logo a altura será $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.

Assim, a área de um triângulo equilátero será:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$A = \frac{\frac{l^2\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

(20 min)

Na sequência, daremos tempo para que os alunos resolvam os problemas propostos em lista que entregaremos a eles.

Avaliação: os alunos serão avaliados de maneira contínua mediante sua participação ativa na aula, e na resolução dos exercícios propostos.

Referências:

CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DO TRIÂNGULO. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-a-condicao-existencia-um-triangulo.htm. Acesso em 28 abr. 2022.

PROPRIEDADES DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/propriedades-triangulo-equilatero.htm#:~:text=Um%20tri%C3%A2ngulo%20%C3%A9%20equil%C3%A1tero%20quando,e%20cada%20lado%20mede%2060%C2%BA. Acesso em 25 abr. 2022.

PROPRIEDADES DO TRIÂNGULO ISÓSCELES. Disponível em: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/triangulo-isosceles. Acesso em 25 abr. 2022.

PROPRIEDADES DO TRIÂNGULO. Disponível em: https://www.stoodi.com.br/blog/matematica/triangulo/#:~:text=Propriedades%20dos%20tri%C3%A2ngulos,-Algumas%20propriedades%20valem&text=o%20lado%20menor%20%C3%A9%20sempre,dos%20%C3%A2ngulos%20externos%20%C3%A9%20360%C2%BA. Acesso em 25 abr. 2022.

TEOREMA DE PITÁGORAS. Disponível em: https://www2.unifap.br/matematicaead/files/2016/03/Rodinelli-artigo-final.pdf. Acesso em 28 abr. 2022.

12.2 RELATÓRIO AULA 8.

Aos trinta dias do mês de abril do ano de 2022, realizamos o oitavo encontro do Promat– Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática, nas dependências da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste, no bloco A, sala 104. Nesse encontro, o conteúdo abordado foi triângulos. Antes dos alunos chegarem, organizamos quatro grupos de 4 carteiras cada.

Iniciamos nosso encontro às 8 horas e 12 minutos, retomando a lista deixada no último encontro, relemos os problemas e conferimos as respostas discutindo as divergências. Nessa aula, havia apenas 3 alunos que haviam participado da última aula, portanto não houve tanta interação na discussão das resoluções. No problema 7, que falava sobre evitar uma epidemia de dengue e que disponibilizava a função do número de infectados em função do tempo, uma das alunas usou o método de tentativa e erro, testando as respostas das alternativas para escolher qual realmente resolvia o problema. Não havendo mais nada a ser discutido da lista demos sequência a aula.

Falamos sobre a condição de existência de um triângulo. Para isso, mostramos aos alunos como construí-los usando régua e compasso. No quadro usamos um barbante para fazer as construções que faríamos com o compasso. Na construção do item b) do exercício 1, uma das alunas já havia identificado que não seria possível construir um triângulo e que os dois lados adjacentes à base se intersectavam sobre ela. Durante as construções, percebemos que uma aluna usava a régua a partir do 1 cm, então explicamos o jeito correto para ela. Na terceira e última construção, um aluno percebeu que se a soma de dois lados fosse menor que o terceiro não conseguiam construir o triângulo. Com isso, definimos a desigualdade triangular.

Na sequência, conversamos e passamos a classificação dos triângulos quanto aos seus lados, enunciando as principais características de cada um. No triângulo isósceles, adaptamos para calcular os ângulos da base com o auxílio do transferidor.

Ao fazermos a atividade de recorte para mostrar a soma dos ângulos internos do triângulo, os alunos demonstraram interesse na atividade e conseguiram perceber por que a soma resulta em 180 °. Nós fizemos com os alunos e colamos no quadro afim de ficar evidente para todos.

Em seguida, relembramos a área do triângulo, que já havíamos usado em aulas anteriores, e então voltamos a falar sobre o triângulo retângulo. Demonstramos o Teorema de Pitágoras usando material concreto, por meio da comparação de áreas. Com isso, calculamos com os alunos como encontrar a altura de um triângulo equilátero qualquer, e com isso, mostramos como encontrar a área também.

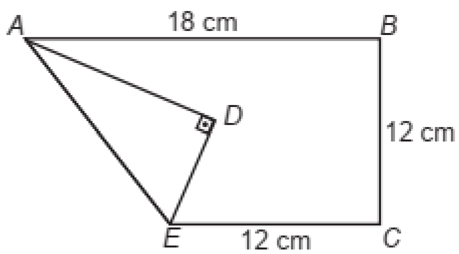
No restante da aula, solicitamos que os alunos resolvessem os exercícios da lista, e após cada um, resolvemos no quadro com eles. Fizemos os exercícios 1, 2 e 4, os demais faremos a correção na próxima aula. Enquanto eles solucionavam, fizemos a chamada, e tivemos 8 alunos.

As 11 horas e 40 minutos encerramos o encontro e organizamos a sala.

12.3 MATERIAL ENTREGUE.

Lista de exercícios triângulos.

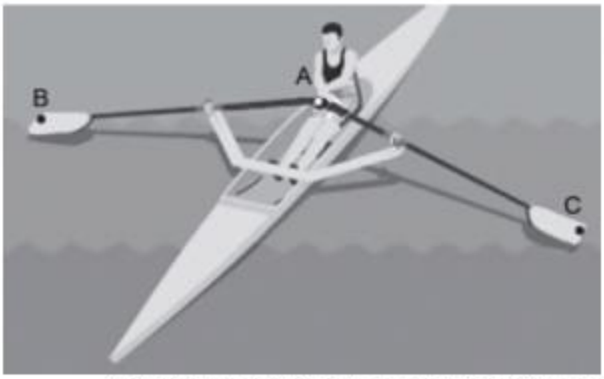
1-(ENEM- 2019) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do *origami* (*ori* = dobrar; *kami* = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do *origami* é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do *origami*, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.



Após essa primeira dobradura, a medida do segmento *AE* é:

a) 2 √22 cm b) 6√3 cm c) 12 cm d) 6 √5 cm e) 12√2 cm

2-(ENEM-2018) O remo de assento deslizante é um esporte que faz uso de um barco e dois remos do mesmo tamanho. A figura mostra uma das posições de uma técnica chamada afastamento.

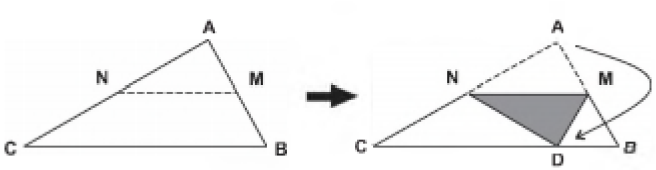


Disponível em: www.remobrasil.com. Acesso em: 6 dez. 2017 (adaptado).

Nessa posição, os dois remos se encontram no ponto A e suas outras extremidades estão indicadas pelos pontos *B* e *C*. Esses três pontos formam um triângulo *ABC* cujo ângulo *BÂC* tem medida de 170°. O tipo de triângulo com vértices nos pontos *A, B* e *C*, quando o remador está nessa posição, é

a) retângulo escaleno. b) acutângulo escaleno. c)acutângulo isósceles. d) obtusângulo isósceles.

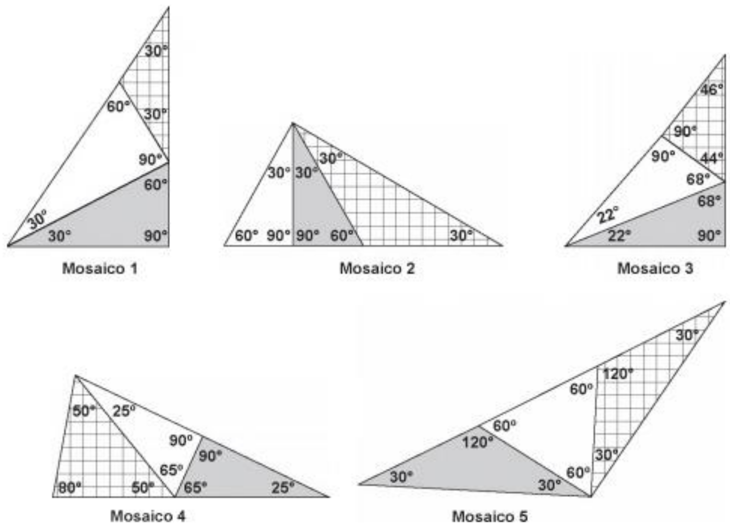
3-(ENEM-2012)Um professor, ao fazer uma atividade de origami (dobraduras) com seus alunos, pede para que estes dobrem um pedaço de papel em forma triangular, como na figura a seguir, de modo que M e N sejam pontos médios respectivamente de AB e AC, e D, ponto do lado BC, indica a nova posição do vértice A do triângulo ABC.



Se ABC é um triângulo qualquer, após a construção, são exemplos de triângulos isósceles os triângulos:

a) CMA e CMB b) CAD e ADB c) NAM e NDM d) CND e DMB
e) CND e NDM

4- (ENEM-2016) Pretende-se construir um mosaico com o formato de um triângulo retângulo, dispondo-se de três peças, sendo duas delas triângulos retângulos congruentes e a terceira um triângulo isósceles. A figura apresenta cinco mosaicos formados por três peças.

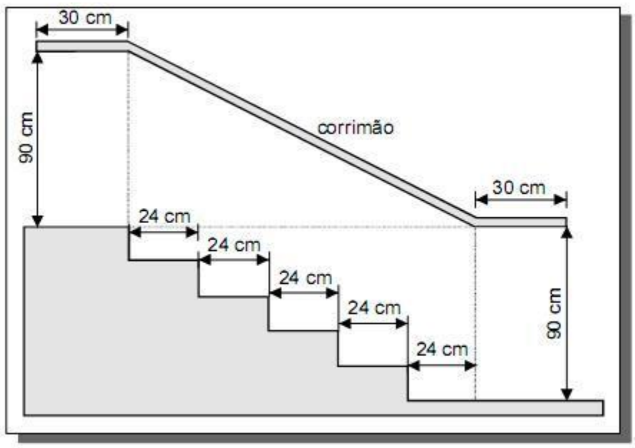


Na figura, o mosaico que tem as características daquele que se pretende construir é o

a) 1 b) 2 c) 3

d) 4 e) 5

5- (ENEM) Na figura abaixo, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a:

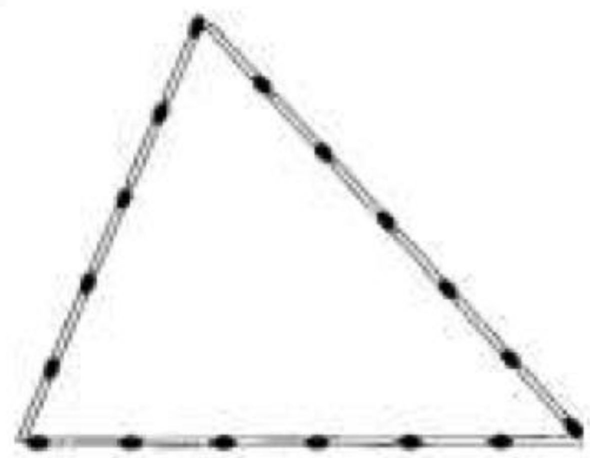


a) 1,8 m b) 1,9 m

c) 2,0 m d) 2,1 m

e) 2,2 m

6-(ENEM 2014) Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.

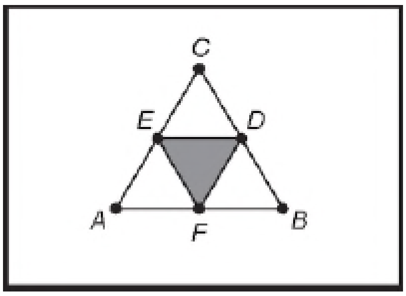


A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é:

a) 3 b) 5 c) 6

d) 8 e) 10

7-(ENEM - 2014) Um artista deseja pintar em um quadro uma figura na forma de triângulo equilátero ABC de lado 1 metro. Com o objetivo de dar um efeito diferente em sua obra, o artista traça segmentos que unem os pontos médios D, E e F dos lados BC, AC e AB, respectivamente, colorindo um dos quatro triângulos menores, como mostra a figura.



Qual é a medida da área pintada, em metros quadrados, do triângulo DEF?

a) 1/16 b) √3/16

c) 1/8 d) √3/8

e) √3/4

12.4 RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS.

1-(ENEM- 2019) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do *origami* (*ori* = dobrar; *kami* = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do *origami* é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do *origami*, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.

Após essa primeira dobradura, a medida do segmento *AE* é

a)2 √22 cm. b)6√3 cm.

c)12 cm. d)6 √5 cm.

e)12√2 cm.

Resolução: aplicando Pitágoras temos:

$$AE^2 = ED^2 + AD^2 \Rightarrow AE^2 = 6^2 + 12^2 \Rightarrow AE^2 = 36 + 144 \Rightarrow AE = \sqrt{180} \Rightarrow AE = \sqrt{36.5} \Rightarrow AE = 6\sqrt{5}.$$

Alternativa d).

2-(ENEM-2018) O remo de assento deslizante é um esporte que faz uso de um barco e dois remos do mesmo tamanho. A figura mostra uma das posições de uma técnica chamada afastamento.

Nessa posição, os dois remos se encontram no ponto A e suas outras extremidades estão indicadas pelos pontos *B* e *C*. Esses três pontos formam um triângulo *ABC* cujo ângulo *BÂC* tem medida de 170°. O tipo de triângulo com vértices nos pontos *A, B* e *C*, quando o remador está nessa posição, é:

a) retângulo escaleno. b) acutângulo escaleno. c)acutângulo isósceles. d) obtusângulo isósceles.

Resolução: note que AB=AD, assim o triângulo é isósceles. E como BÂD=170° é obtusângulo. Alternativa d).

3-(ENEM-2012) Um professor, ao fazer uma atividade de origami (dobraduras) com seus alunos, pede para que estes dobrem um pedaço de papel em forma triangular, como na figura a seguir, de modo que M e N sejam pontos médios respectivamente de AB e AC, e D, ponto do lado BC, indica a nova posição do vértice A do triângulo ABC. Se ABC é um triângulo qualquer, após a construção, são exemplos de triângulos isósceles os triângulos:

a) CMA e CMB b) CAD e ADB c) NAM e NDM d) CND e DMB

e) CND e NDM

Resolução: Como MN é a base média de ABC, segue-se que AM = MB = MD e AN = CN = ND. Portanto, são exemplos de triângulos isósceles os triângulos CND e DMB. Alternativa d).

4- (ENEM-2016) Pretende-se construir um mosaico com o formato de um triângulo retângulo, dispondo-se de três peças, sendo duas delas triângulos retângulos congruentes e a terceira um triângulo isóscele. Afigura apresenta cinco mosaicos formados por três peças.

Na figura, o mosaico que tem as características daquele que se pretende construir é o

a)1 b)2 c)3 d)4 e)5.

Resolução: Primeiramente devemos analisar cada mosaico e cada tipo de triângulo existente. Mosaico 1: Temos que os dois triângulos retângulos não são congruentes pois percebemos que as medidas dos catetos do triângulo de baixo são menores do que as do de cima. Mosaico 2:Temos dois triângulos retângulos congruentes e um isósceles. Mosaico 3:O terceiro triângulo não é isósceles. Mosaico 4: A terceira figura não é um triângulo isósceles. Mosaico 5: Não possui triângulo retângulo.

Alternativa b)

5-(ENEM) Na figura abaixo, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a:

a)1,8 m. b)1,9 m. c)2,0 m. d)2,1 m. e)2,2 m.

Resolução: O comprimento do corrimão é composto da parte horizontal mais 60 cm. para calcular a parte horizontal aplicaremos Pitágoras. Temos que um cateto é 90 cm e o outro é 120 cm assim temos:

$x^2 = 90^2 + 120^2 \Rightarrow x = \sqrt{8100 + 14400} \Rightarrow x = 150\ cm$. para o comprimento total temos 150+60 = 210cm ou 2,1 m. Alternativa d).

6-(ENEM-2014) Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.

A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é:

a) 3 b) 5 c) 6 d) 8 e) 10

Resolução: O perímetro do triângulo é de 17 palitos. Temos que esse triângulo deve ter um lado medindo 6 palitos. Desse modo, poderemos formar os triângulos com as seguintes medidas de lados, levando em consideração a condição de existência de um triângulo: 6-6-5 ; 7-6-4 ; 8-6-3. Alternativa a).

7-(ENEM - 2014) Um artista deseja pintar em um quadro uma figura na forma de triângulo equilátero ABC de lado 1 metro. Com o objetivo de dar um efeito diferente em sua obra, o artista traça segmentos que unem os pontos médios D, E e F dos lados BC, AC e AB, respectivamente, colorindo um dos quatro triângulos menores, como mostra a figura.

Qual é a medida da área pintada, em metros quadrados, do triângulo DEF?

A) 1/16 B) √3/16

C) 1/8 D) √3/8

E) √3/4

Resolução: vamos calcular a área toda e dividi-la em quatro partes congruentes. $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1\sqrt{3}}{4}$. Essa é a área do triângulo todo, para determinar somente da parte escura, vamos dividir por quadro e tomar uma parte. $\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{16}$. Alternativa b).

13. ENCONTRO 9.

13.1 PLANO DE AULA 9 – 07/05/2022

Conteúdo: Polígonos.

Público-alvo: alunos oriundos da 3° série do ensino médio da rede pública estadual do Paraná.

Objetivo geral: Relembrar e construir conhecimentos sobre polígonos.

Objetivos específicos:

- Reconhecer, nomear e comparar polígonos;
- Compreender os conceitos de paralelismo e perpendicularismo dos lados de polígonos;
- Identificar ângulos nos polígonos;
- Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares;
- Determinar medidas de área de polígonos.

Tempo de execução: 3 horas e 40 minutos.

Recursos didáticos: Quadro, giz, apagador, material impresso, papel sulfite, notebook, projetor, *software Geogebra.*

Encaminhamento metodológico: iniciaremos a aula retomando a lista do encontro anterior, faremos uma breve correção e conferência das respostas. **(15 min).**

Falaremos que nesse encontro o conteúdo abordado será polígonos, questionaremos o que lembram do assunto e listaremos no quadro as informações coletadas. **(10 min).**

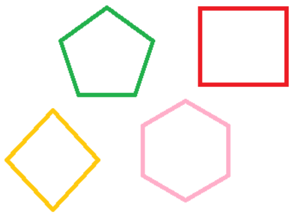
Em seguida apresentaremos uma definição formal para polígonos:

Polígonos são figuras geométricas formadas por um segmento de retas. Eles podem ser convexos, não convexos, regulares e não regulares.

A palavra polígono vem da palavra grega *polygonom.* Poli (muitos) + gonos (ângulos).

Podem ser classificados como convexos ou não convexos. Um polígono é convexo se todos os segmentos de reta com extremidades no interior de um polígono tiverem todos os seus pontos situados no interior desse polígono.

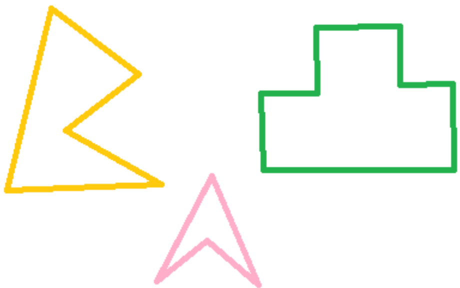
Figura 28 polígonos convexos.



Fonte: das autoras.

Se um segmento de reta tiver extremidades no interior de um polígono, mas nem todos os seus pontos estiverem situados no interior desse polígono, ele será não convexo.

Figura 29 polígonos não convexos.



Fonte: das autoras.

Um polígono é formado por:

Lados: são os segmentos de reta que limitam o polígono;

Vértices: são os pontos que são extremidades dos lados do polígono;

Diagonais: são segmentos de reta cujas extremidades são vértices que não pertencem a um mesmo lado do polígono;

Ângulos internos: são os ângulos formados por um par de lados consecutivos que contêm a região interna do polígono.

(20 min)

Para introduzir diagonais de polígonos convexos, solicitaremos que os alunos resolvam o exercício um proposto na lista.

Em uma região existem 10 cidades, todas sobre uma circunferência imaginária. Deseja-se construir estradas em linha reta ligando todas estas cidades entre si. Quantas serão as estradas?

(5-10min)

Entregaremos a tabela abaixo no material impresso da aula e a preencheremos juntamente com os alunos utilizando do Geogebra como ferramenta de auxílio. Durante o preenchimento da tabela, falaremos sobre a decomposição dos polígonos em triângulos, que de modo geral chegaremos que um polígono possui $(n - 2)$ triângulos. Juntamente com a decomposição em triângulos, esperamos chegar que a diagonal de um polígono é dada sempre por $d = \frac{n(n-3)}{2}$.

Figura 30 quadro polígonos.

Número de lados	Nome dos polígonos	Número de vértices	Número de diagonais.	Número de ângulos internos	Soma dos ângulos internos
3	Triângulo				
4	Quadrilátero				
5	Pentágono				
6	Hexágono				
7	Heptágono				
8	Octógono				
9	Eneágono				
10	Decágono				
15	Pentadecágono				
20	Icoságono				

Fonte: das autoras (2022).

(20-25 min)

Logo em seguida falaremos sobre a classificação dos polígonos quanto a medida de seus lados e ângulos.

Polígonos equiláteros: são aqueles cujos lados têm a mesma medida.

Polígonos equiângulos: são aqueles cujos ângulos têm a mesma medida.

Polígonos regulares: são aqueles que são, ao mesmo tempo, equiláteros e equiângulos.

(5 min)

Voltaremos em nossa tabela e estabeleceremos uma relação entre a soma dos ângulos internos dos polígonos nos casos regulares, chegando que cada ângulo interno será $a = \frac{(n-2)*180}{n}$. **(5-10 min)**

Abordaremos em seguida os quadriláteros, falando sobre as características especificas em alguns casos.

Paralelogramos

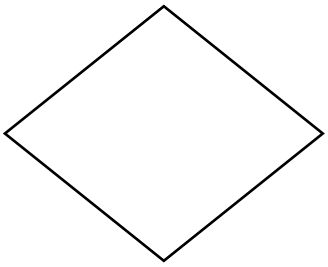
- Possuem lados opostos congruentes;
- Possuem ângulos opostos congruentes;
- As diagonais de um paralelogramo cruzam-se em seus pontos médios.

- A área de um paralelogramo se dá através da multiplicação entre altura e a base. $A = h.b$

Retângulos

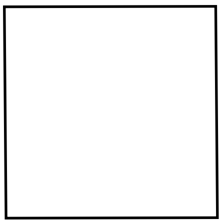
- São paralelogramos;
- Ângulos internos são retos;
- As diagonais de um retângulo são congruentes.
- A fórmula para o cálculo de um retângulo é $A = a.b$.

Losangos



- São paralelogramos;
- Possuem todos os lados congruentes;
- As diagonais de um losango são perpendiculares.
- Área de um losango basta multiplicar a diagonal maior (D) pela diagonal menor (d), e dividir por 2, resultando na fórmula: $A = \frac{(\boldsymbol{D}.\boldsymbol{d})}{\mathbf{2}}$.

Quadrados



- São paralelogramos;
- São losangos;
- São retângulos;
- As diagonais do quadrado são perpendiculares e congruentes.
- Como o quadrado tem todos os lados (l) iguais, podemos escrever a fórmula de duas maneiras: $A = l\,.\,l$ ou $A = l^2$.

Trapézios isósceles

- Possuem apenas um par de lados congruentes;
- As diagonais são congruentes.
- Somar o valor das duas bases – base maior (B) e base menor (b) –, multiplicar pela altura (h) e dividir por 2. Assim, temos a fórmula $A = \frac{[(B+b).h]}{2}$.

(20 min)

Relembraremos que o perímetro dos polígonos é calculado através da soma de todos os lados, já que esse conceito foi bastante explorado em encontros anteriores. Para isso solicitaremos que resolvam o exercício dois da lista. Pediremos se alguém deseja solucionar no quadro, caso não houver manifestações afirmativas nós resolveremos. **(15 min)**

A fim de recordar e utilizar conceitos sobre área de quadriláteros, solicitaremos que resolvam o exercício três da lista. Como já mencionado, questionaremos se alguém deseja fazer no quadro, caso contrário solucionaremos. **(10 min)**

Para abordar a particularidade existente na área de um hexágono regular, construiremos com os alunos uma dobradura, e em seguida solicitaremos que determinem a área da figura encontrada. Esperamos que os alunos encontrem relação na decomposição em triângulos equiláteros e que se recordem do encontro anterior no qual abordamos que a área de um triângulo equilátero é: $A_{triângulo} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$. Assim a área de um hexágono regular é $6.A_{triângulo.}$ **(20-25 min)**

O tempo remanescente será destinado a solucionar junto com os participantes o demais exercícios propostos na lista. Como já mencionado, sempre incentivaremos que compartilhem suas soluções com o grupo. **(35 min)**

Avaliação: A avaliação será de maneira contínua, observando a participação dos alunos durante o desenvolvimento da aula, bem a resolução da lista proposta.

Referências:

BARROSO, Juliana. Projeto Araribá: Matemática. Vol 4 .São Paulo: Moderna, 2006.

COMO FAZER DOBRADURA DE HEXÁGONO REGULAR: Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=9IGcnffC0h4. Acesso em: 04 maio 2022. https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/quadrilateros.htm#:~:text=paralelogramo%20e%20trap%C3%A9zio,Quadril%C3%A1teros%20s%C3%A3o%20pol%C3%ADgonos%20que%20possuem%20quatro%20lados.,sempre%20igual%20a%20360%C2%B0.

QUESTÕES DO ENEM SOBRE ÁREAS. Disponível em: https://soexercicios.com.br/plataforma/questoes-de-vestibular/ENEM/55608-55609/-area-do-retangulo-b-area-do-quadrado-b-rec-/1. Acesso em: 04 maio 2022.

QUESTÕES SOBRE POLÍGONOS ENEM. Disponível em: https://www.qconcursos.com/questoes-do-enem/disciplinas/matematica-matematica/poligonos/questoes?page=3. Acesso em: 01 maio 2022.

13.2 RELATÓRIO AULA 9.

Ao dia 07 do mês de maio do ano de 2022, realizamos o nono encontro do Promat– Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática, nas dependências da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste, no bloco A, sala 104. Nesse encontro, o conteúdo abordado foi polígonos. Antes da chegada dos alunos, deixamos a sala organizada com 4 grupos de 4 carteiras cada.

Acolhemos os alunos e iniciamos o encontro com seis minutos de atraso, reorganizamos a sala em apenas um grupo já que havia apenas 6 alunos presentes. Fizemos a correção da lista deixada no encontro anterior, e resolvemos no quadro uma questão que gerou divergências entre as respostas marcadas, o assunto abordado na questão era triângulos isósceles após a dobradura de um papel em seus pontos médios, a dúvida era a respeito dos pontos médios.

Em seguida coletamos os conhecimentos que os alunos já possuíam sobre polígonos, e escrevemos todos na lousa. Alguns tópicos levantados pelos alunos foram que: polígonos são figuras fechadas, possuem vértices, lados, ângulos, e alguns exemplos também foram citados pelo grupo. Após a coleta de informações solicitamos que resolvessem o exercício dois da lista, que consistia em construir estradas que ligassem 9 cidades umas às outras, tínhamos o objetivo de introduzir a contagem de diagonais e de lados de um polígono. Um aluno chegou rapidamente à solução, ele pensou da seguinte forma: se de cada vértice do decágono saem 9 segmentos, ao todos seriam 90 estradas para ligar todas as cidades. O que estava sentado ao seu lado chegou em 45, e percebemos que ele explicou sua solução justificando que da resposta 90 faltava eliminar as repetições.

Logo após utilizamos o Geogebra para completar a tabela que relacionava o número de lados e o número de diagonais, junto com os alunos desenhamos a sequência de polígonos desde o triângulo até o octógono e registramos todas as informações presentes na tabela. Depois pedimos que os alunos analisassem suas anotações e tentassem descobrir algum padrão entre elas. Após alguns poucos minutos de análise um aluno disse que para descobrir as diagonais de um polígono bastava diminuir três da quantidade de vértices e em seguida multiplicar pelos vértices do polígono $n \cdot (n-3)$ depois acrescentou que devemos dividir por 2 a fim de eliminar as repetições. No cálculo da soma dos ângulos internos também, o mesmo aluno percebeu que sempre haveria $n - 2$ triângulos em cada polígono, depois bastava multiplicar por 180° e descobrir a soma.

Na sequência definimos o que seriam os polígonos regulares, e quais são suas características particulares. Abordamos então, com mais tempo, os quadriláteros, já que são as figuras mais cobradas no ENEM. Iniciamos com paralelogramos, ao desenharmos questionamos como eles fariam para desenhar um paralelogramo, um aluno nos respondeu da seguinte forma: “prof desenha um quadrado e dois triângulos retângulos na ponta, mas um deles virado”. Desenhamos da maneira sugerida pelo aluno, mas também abordamos as propriedades existentes em um paralelogramo. Depois passamos para o retângulo e o quadrado, sempre ressaltando a ordem e as propriedades de cada um, já que percebemos no encontro sete que eles não consideravam um quadrado como sendo um retângulo. E por fim abordamos o losango e o trapézio, em todos os quadriláteros mencionados. Demostramos ainda suas decomposições em outras figuras, para auxiliar no cálculo da área.

Solicitamos em seguida que resolvessem os exercícios dois e três da lista como uma revisão do conteúdo de área e perímetro, abordamos como uma revisão, pois esses conhecimentos foram utilizados com frequência nos encontros anteriores. Realizamos a correção com os alunos na lousa, tirando dúvidas que surgiram durante a resolução.

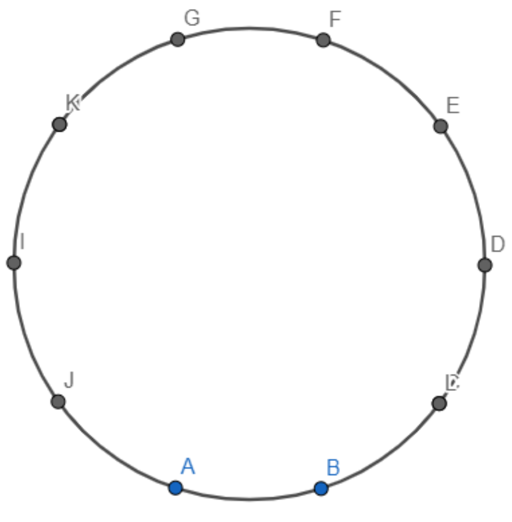
Iniciamos o momento da realização da dobradura, entregamos a folha sulfite a todos e juntos construímos o passo a passo da montagem do hexágono. Assim que terminamos a confecção do hexágono solicitamos que determinassem a área da figura encontrada, nosso objetivo era que lembrassem da aula anterior e fizessem uma relação com a área do triângulo equilátero, foi instantânea a resposta de um aluno, ele disse imediatamente que a área do hexágono regular era seis vezes a área do triângulo equilátero com lado igual ao lado do hexágono. Questionamos como ele poderia ter certeza de que se tratava de seis triângulos equiláteros, ele dobrou novamente o papel e justificou que os triângulos ficavam sobrepostos, dissemos então que com essa informação ele justificava que os seis triângulos eram congruentes, mas que para comprovar que eram equiláteros, precisaria recorrer aos ângulos internos. Ele logo entendeu e nos mostrou que os ângulos internos do triângulo seriam de 60° pois o interno do hexágono era 120° e ao construir os triângulos "cortávamos" bem ao meio o ângulo.

Solicitamos que se dedicassem à lista nos minutos restantes. Para finalizar o encontro, distribuímos pirulitos à turma e agradecemos a presença de todos.

13.3 MATERIAL ENTREGUE.

Lista de exercícios polígonos.

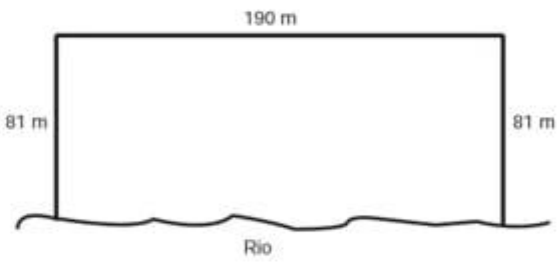
1- (OBMEP) Em uma região existem 10 cidades, todas sobre uma circunferência imaginária. Deseja-se construir estradas em linha reta ligando todas estas cidades entre si. Quantas serão as estradas?



- Quadro para atividade no Geogebra.

Número de lados.	Nome dos polígonos.	Número de vértices	Número de diagonais.	Número de ângulos internos.	Soma dos ângulos internos.
3	Triângulo				
4	Quadrilátero				
5	Pentágono				
6	Hexágono				
7	Heptágono				
8	Octógono				
9	Eneágono				
10	Decágono				
15	Pentadecágono				
20	Icoságono				

2- (ENEM 2013) Para o reflorestamento de uma área, deve-se cercar totalmente, com tela, os lados de um terreno, exceto o lado margeado pelo rio, conforme a figura. Cada rolo de tela que será comprado para confecção da cerca contém 48 metros de comprimento. A quantidade mínima de rolos que deve ser comprada para cercar esse terreno é:



A) 6. B) 7. C) 8. D) 11. E) 12.

3- (ENEM-2020) O proprietário de um apartamento decidiu instalar porcelanato no piso da sala. Essa sala tem formato retangular com 3,2 m de largura e 3,6 m de comprimento. As peças do porcelanato têm formato de um quadrado com lado medindo 80 cm. Esse porcelanato é vendido em dois tipos de caixas, com os preços indicados a seguir.

- Caixas do tipo A: 4 unidades de piso, R$ 35,00;
- Caixas do tipo B: 3 unidades de piso, R$ 27,00.

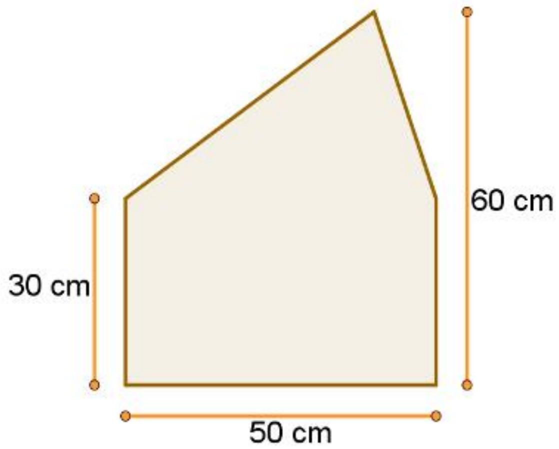
Na instalação do porcelanato, as peças podem ser recortadas e devem ser assentadas sem espaçamento entre elas, aproveitando-se ao máximo os recortes feitos. A compra que atende às necessidades do proprietário, proporciona a menor sobra de pisos e resulta no menor preço é:

A) 5 caixas do tipo A. B) 1 caixa do tipo A e 4 caixas do tipo B.

C) 3 caixas do tipo A e 2 caixas do tipo B. D) 5 caixas do tipo A e 1 caixa do tipo B.

E) 6 caixas do tipo B

4-Calcule a medida da área do pentágono na figura a seguir, considerando as medidas que foram colocadas nela.



a) 750 cm^2

b) 1500 cm^2

c) 2250 cm^2

d) 3000 cm^2

e) 9000 cm^2

5- (PUC-RIO 2007) Num retângulo de perímetro 60, a base é duas vezes a altura. Então a área é:

A)200 B) 300 C) 100 D) 50 E)30

6- (ENEM 2020) Pretende-se comprar uma mesa capaz de acomodar 6 pessoas, de modo que, assentadas em torno da mesa, cada pessoa disponha de, pelo menos, 60 cm de espaço livre na borda do tampo da mesa, que deverá ter a menor área possível. Na loja visitada há mesas com tampos nas formas e dimensões especificadas:

- Mesa I: hexágono regular, com lados medindo 60 cm;
- Mesa II: retângulo, com lados medindo 130 cm e 60 cm;
- Mesa III: retângulo, com lados medindo 120 cm e 60 cm;

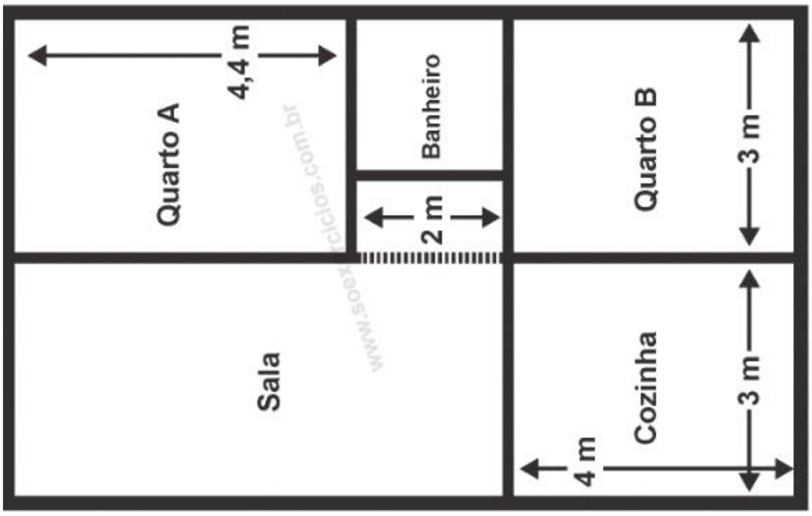
• Mesa IV: quadrado, com lados medindo 60 cm;

• Mesa V: triângulo equilátero, com lados medindo 120 cm.

A mesa que atende aos critérios especificados é a:

A) I. B) II. C) III. D) IV. E) V.

7- (ENEM-2017) A figura traz o esboço da planta baixa de uma residência. Algumas medidas internas dos cômodos estão indicadas. A espessura de cada parede externa da casa é 0,20 me das paredes internas, 0,10 m.

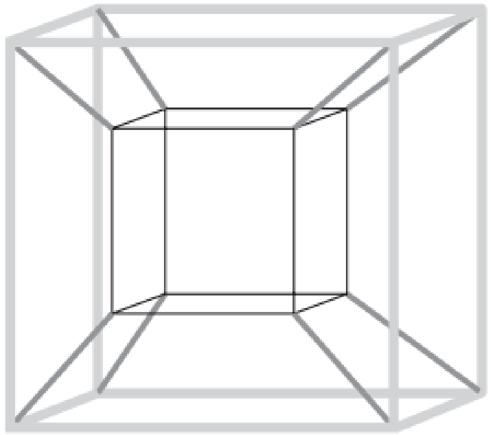


Sabe-se que, na localidade onde se encontra esse imóvel, o Imposto Predial Territorial Urbano (IPTU) é calculado conforme a área construída da residência. Nesse cálculo, são cobrados R$ 4,00 por cada metro quadrado de área construída. O valor do IPTU desse imóvel, em real, é:

A) 250,00. B) 250,80. C) 258,64. D) 276,48. E) 286,00.

8-Muitos brinquedos que frequentemente são encontrados em praças e parques públicos apresentam formatos de figuras geométricas bidimensionais e tridimensionais. Uma empresa foi contratada para desenvolver uma nova forma de brinquedo. A proposta apresentada pela empresa foi de uma estrutura formada apenas por hastes metálicas, conectadas umas às outras, como apresentado na figura. As hastes de mesma tonalidade e espessura são congruentes. Com base na proposta apresentada, quantas figuras geométricas planas de cada tipo são formadas pela união das hastes?

A) 12 trapézios isósceles e 12 quadrados.



B)24 trapézios isósceles e 12 quadrados.

C)12 paralelogramos e 12 quadrados.

D) 8 trapézios isósceles e 12 quadrados.

E)12 trapézios escalenos e 12 retângulos.

13.4 RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS.

1- (OBMEP) Em uma região existem 10 cidades, todas sobre uma circunferência imaginária. Deseja-se construir estradas em linha reta ligando todas estas cidades entre si. Quantas serão as estradas?

Resolução: as cidades formam um decágono convexo. Assim o total de estradas para ligá-las duas a duas é o número de diagonais deste decágono mais o número de lados, ou seja, $\frac{10.(10-3)}{2} = 35 \Rightarrow 35 + 10 = 45$.

- Quadro para atividade no Geogebra.

Número de lados.	Nome dos polígonos.	Número de vértices	Número de diagonais.	Número de ângulos internos.	Soma dos ângulos internos.
3	Triângulo	3	0	3	180°
4	Quadrilátero	4	2	4	360°
5	Pentágono	5	5	5	540°
6	Hexágono	6	9	6	720°
7	Heptágono	7	14	7	900°
8	Octógono	8	20	8	1080°
9	Eneágono	9	27	9	1260°

10	Decágono	10	35	10	1440°
15	Pentadecágono	15	90	15	2340°
20	Icoságono	20	170	20	3240°

2- (ENEM 2013) Para o reflorestamento de uma área, deve-se cercar totalmente, com tela, os lados de um terreno, exceto o lado margeado pelo rio, conforme a figura. Cada rolo de tela que será comprado para confecção da cerca contém 48 metros de comprimento. A quantidade mínima de rolos que deve ser comprada para cercar esse terreno é:

A) 6. B) 7. C) 8. D) 11. E) 12.

Resolução: para descobrir basta somar os três lados do terreno $81 + 190 + 81 = 352$. Como cada rolo tem 48 m, vamos dividir o perímetro por 48 $\frac{352}{48} = 7{,}333$. Deve ser comprado 8 rolos.

3- (ENEM-2020) O proprietário de um apartamento decidiu instalar porcelanato no piso da sala. Essa sala tem formato retangular com 3,2 m de largura e 3,6 m de comprimento. As peças do porcelanato têm formato de um quadrado com lado medindo 80 cm. Esse porcelanato é vendido em dois tipos de caixas, com os preços indicados a seguir.

- Caixas do tipo A: 4 unidades de piso, R$ 35,00;
- Caixas do tipo B: 3 unidades de piso, R$ 27,00.

Na instalação do porcelanato, as peças podem ser recortadas e devem ser assentadas sem espaçamento entre elas, aproveitando-se ao máximo os recortes feitos. A compra que atende às necessidades do proprietário, proporciona a menor sobra de pisos e resulta no menor preço é:

A) 5 caixas do tipo A.

B) 1 caixa do tipo A e 4 caixas do tipo B.

C) 3 caixas do tipo A e 2 caixas do tipo B.

D) 5 caixas do tipo A e 1 caixa do tipo B.

E) 6 caixas do tipo B

Resolução: primeiro vamos calcular a área da sala que deseja ser azulejada, como a sala tem um formato retangular sua área é calculada através da multiplicação dos lados. $3{,}2 \cdot 3{,}6 = 11{,}52$ m^2. Podemos calcular a área que cada peça cobre, como a peça é quadrada também calculamos multiplicando seus lados $0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64\ m^2$.

Agora podemos encontrar quantas peças serão necessárias para cobrir a sala $\frac{11,52}{0,64} = 18$ peças. Analisando as alternativas temos, na letra a teríamos desperdícios, na letra b não teríamos peças suficientes, na letra c 3 caixas do tipo A, ele pagaria R$ 105,00 mais 2 caixas do tipo B R$54,00, somando teríamos R$159,00. Analisando a alternativa d haverá desperdícios, por último na alternativa e temos a quantidade suficiente de pisos, mas pagaríamos R$162,00. Assim o menor preço é comprando conforme a letra C.

4-Calcule a medida da área do pentágono na figura a seguir, considerando as medidas que foram colocadas nela.

a) 750 cm^2 b) 1500 cm^2 c) 2250 cm^2 d) 3000 cm^2 e) 9000 cm^2

Resolução: podemos decompor a figura em um triângulo e um retângulo e calcular suas áreas separadas. $A_\Delta = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{50 \cdot 30}{2} = 750$ cm². E a área do retângulo $A_\blacksquare = b \cdot a = 30 \cdot 50 = 1500\ cm^2$. Agora basta somar as duas $750 + 1500 = 2250\ cm^2$.

5- <u>(PUC-RIO 2007)</u> Num retângulo de perímetro 60, a base é duas vezes a altura. Então a área é:

A)200 B) 300 C) 100 D) 50 E)30

Resolução: podemos pensar em um sistema de equações com x representando a base e y a altura: $\begin{cases} 2x + 2y = 60 \\ x = 2y \end{cases}$ podemos substituir a equação dois na um: $2(2y) + 2y = 60 \Rightarrow 4y + 2y = 60 \Rightarrow 6y = 60 \Rightarrow y = 10$. Assim concluímos que a altura é 10 e a base é 20, a área nesse caso seria 10·20=200 cm².

6-(ENEM 2020) Pretende-se comprar uma mesa capaz de acomodar 6 pessoas, de modo que, assentadas em torno da mesa, cada pessoa disponha de, pelo menos, 60 cm de espaço livre na borda do tampo da mesa, que deverá ter a menor área possível. Na loja visitada há mesas com tampos nas formas e dimensões especificadas:

- Mesa I: hexágono regular, com lados medindo 60 cm;
- Mesa II: retângulo, com lados medindo 130 cm e 60 cm;
- Mesa III: retângulo, com lados medindo 120 cm e 60 cm;
- Mesa IV: quadrado, com lados medindo 60 cm;
- Mesa V: triângulo equilátero, com lados medindo 120 cm.

A mesa que atende aos critérios especificados é a:

A) I. B) II. C) III. D) IV. E) V.

Resolução: podemos descartar a mesa IV, pois não acomoda 6 pessoas com as condições exigidas. Vamos verificar as demais mesas: mesa 1, acomoda as 6 pessoas e possui uma área de: $A = \frac{6 \cdot 60^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9353{,}07\ cm^2$. A mesa 2, possui 380 cm de perímetro o que permite acomodar todas as pessoas e uma área de $130 \cdot 60 = 7800\ cm^2$.A mesa 3, possui 360 cm de perímetro que permite acomodar todas as 6 pessoas e possui $120 \cdot 60 = 7200\ cm^2$de área. A mesa 5, tem 360 cm de perímetro o que acomoda todas as pessoas e uma área de $6235{,}38\ cm^2$. Como deseja-se escolher a mesa com menor área devemos escolher a mesa 5. Alternativa E.

7- (ENEM-2017) A figura traz o esboço da planta baixa de uma residência. Algumas medidas internas dos cômodos estão indicadas. A espessura de cada parede externa da casa é 0,20 me das paredes internas, 0,10 m.

Sabe-se que, na localidade onde se encontra esse imóvel, o Imposto Predial Territorial Urbano (IPTU) é calculado conforme a área construída da residência. Nesse cálculo, são cobrados R$ 4,00 por cada metro quadrado de área construída. O valor do IPTU desse imóvel, em real, é:

A) 250,00. B) 250,80. C) 258,64. D) 276,48. E) 286,00.

Resolução:

8-Muitos brinquedos que frequentemente são encontrados em praças e parques públicos apresentam formatos de figuras geométricas bidimensionais e tridimensionais. Uma empresa foi contratada para desenvolver uma nova forma de brinquedo. A proposta apresentada pela empresa foi de uma estrutura formada apenas por hastes metálicas, conectadas umas às outras, como apresentado na figura. As hastes de mesma tonalidade e espessura são congruentes. Com base na proposta apresentada, quantas figuras geométricas planas de cada tipo são formadas pela união das hastes?

A) 12 trapézios isósceles e 12 quadrados.

B) 24 trapézios isósceles e 12 quadrados.

C) 12 paralelogramos e 12 quadrados

D) 8 trapézios isósceles e 12 quadrados.

E)12 trapézios escalenos e 12 retângulos.

Resolução: A figura possui dois cubos, cada um, com 12 quadrados. Além disso, os vértices dos cubos estão ligados por um segmento de reta, formando trapézios isósceles. Assim, são 12 trapézios isósceles. Alternativa A.

14. ENCONTRO 10.

14.1 PLANO DE AULA 10 – 14/05/2022

Conteúdo: Circunferência e círculo.

Público-alvo: alunos oriundos da 3° série do ensino médio da rede pública estadual do Paraná.

Objetivo geral: Relembrar e construir conhecimentos sobre círculo e circunferência.

Objetivos específicos:

- Identificar os elementos da circunferência: corda, raio e diâmetro;
- Estabelecer o número π como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro;
- Resolver problemas, de diferentes contextos, que envolvam medidas de área da circunferência;
- Compreender o conceito de arco, ângulo central e ângulos inscritos na circunferência;

Tempo de execução: 3 horas e 40 minutos.

Recursos didáticos: Quadro, giz, apagador, material impresso, notebook, projetor, régua, tesoura, moeda, rolo de fita adesiva, copo, tampa de pote.

Encaminhamento metodológico: iniciaremos a aula retomando a lista do encontro anterior, faremos uma breve correção e conferência das respostas. **(20 min).**

Daremos início ao conteúdo sobre circunferência, retomando oralmente o que é o comprimento da circunferência, o raio e o diâmetro. Depois faremos com os alunos uma investigação, cujo objetivo é encontrarmos o valor de π. Levaremos sólidos no formato circular, e vamos solicitar aos alunos que meçam o comprimento e o diâmetro da circunferência e anotem a razão entre elas. Nesse momento deixaremos que usem a calculadora para facilitar os cálculos. Para o comprimento, contornaremos o objeto com barbante e depois mediremos com o auxílio da régua. Para o diâmetro também usaremos a régua. Eles poderão organizar esses dados como acharem melhor. Nós os organizaremos por meio de tabela, ou conforme algum aluno sugerir.

Tabela 11 medidas objetos.

Objeto	Comprimento da circunferência	Diâmetro	Razão
Moeda			
Rolo de fita adesiva			

Copo			
Tampa de pote			

Observaremos então o que aconteceu com a razão entre essas duas medidas, e vamos encontrar uma regularidade, que todos se aproximam de um valor específico, que enunciaremos como sendo o número pi. **(30 min)**

Posteriormente apresentaremos a fórmula para calcular o comprimento da circunferência. Faremos isso a partir dos cálculos que já estávamos realizando:

$$\frac{comprimento\ da\ circunferência}{diâmetro} \cong \pi$$

Como queremos o comprimento, o isolaremos, e teremos que $comprimento\ da\ circunferência = \pi \cdot diâmetro$. Tomando C o comprimento da circunferência e d o diâmetro temos: $C = d\pi$. Sabemos que o diâmetro é duas vezes o raio, tomando $r = raio$ teremos: $C = 2r\pi$.

Então pediremos aos alunos que façam o exercício 1 da lista de exercício que entregaremos. Deixaremos um tempo para que resolvam e corrigiremos no quadro, solicitando que compartilhem como fizeram para solucionar o problema, e se o aluno se sentir confortável poderá ir expor sua resolução no quadro. **(20 min)**

Na sequência falaremos sobre corda, arco e setor circular:

Corda: é qualquer segmento de reta que liga dois pontos de uma circunferência.

Arco: é uma parte de uma circunferência limitada por dois pontos.

Setor circular: é uma região do círculo delimitada por dois raios do círculo e um arco da circunferência.

(5 min)

Para encontrar a área da circunferência, utilizaremos a decomposição em setores. Usaremos a construção da página Geometria Intuitiva Interativa, disponibilizada no site https://www.gi2.pt/galerias/area-de-um-circulo/.

Área da circunferência: πr^2

Então solicitaremos que os alunos resolvam o exercício 3 da lista de exercícios. Para correção, procederemos da mesmo forma que o exercício 1. Falaremos aos alunos, que a figura geométrica limitada por dois círculos que possuem o mesmo centro (concêntricos) de raios diferentes é chamada coroa circular. **(20 min)**

Na sequência falaremos sobre ângulos central e ângulo inscrito na circunferência e a relação entre eles.

Ângulo central: é o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência e seus lados determinam dois raios.
Ângulo inscrito na circunferência: é o ângulo cujo seu vértice é um ponto da circunferência.
A medida do ângulo inscrito na circunferência é metade da medida do ângulo central correspondente.

(10 min)

Enunciaremos que uma consequência dessa relação, é que se um triângulo retângulo é inscrito em meia circunferência, então sua hipotenusa coincide com o diâmetro da circunferência, e outra que ângulos inscritos em um mesmo arco são congruentes. Então pediremos que os alunos resolvam o exercício 2 da lista e faremos a correção da mesma forma que os exercícios anteriores. **(20 min)**

Por fim resolveremos os demais exercícios com os alunos.

Avaliação: A avaliação será de maneira contínua, observando a participação dos alunos durante o desenvolvimento da aula, e na resolução dos exercícios propostos no decorrer da aula.

Referências:

ÂNGULOS NA CIRCUNFEREÊNCIA. Disponível em: https://descomplica.com.br/d/vs/aula/angulos-na-circunferencia-e-poligonos-inscritos/#:~:text=%C3%82ngulo%20central%3A%20seu%20v%C3%A9rtice%20est%C3%A1,v%C3%A9rtice%20no%20ponto%20de%20tang%C3%AAncia).

ÂNGULOS NA CIRCUNFEREÊNCIA. Disponível em: https://wp.ufpel.edu.br/sauer/files/2018/06/angulos-na-circunferencia.pdf. Acessado em: 11 maio 2022.

ARCEGO, Priscila, KIEFER, Juliana Gabriele, MARIANI, Rita de Cássia Pistóia. Área do Círculo em Livros Didáticos do Ensino Fundamental: um Olhar a partir das Apreensões Figurais. Perspectivas da Educação Matemática – INMA/UFMS – v. 14, n. 34 – Ano 2021

ELEMENTOS DA CIRCUNFERÊNCIA. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/area-setor-circular.htm

ELEMENTOS DA CIRCUNFERÊNCIA. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/comprimento-da-circunferencia/. Acesso em: 11 maio 2022.

ELEMENTOS DA CIRCUNFERÊNCIA. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/elementos-circulo-e-circunferencia.htm. Acesso em: 11 maio 2022.

14.2 RELATÓRIO AULA 10.

Ao dia 14 do mês de maio do ano de 2022, realizamos o décimo e, último encontro do Promat– Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática, nas dependências da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste, no bloco A, sala 104. Nesse encontro, o conteúdo abordado foi circunferência. Antes da chegada dos alunos, deixamos a sala organizada com 4 grupos de 4 carteiras cada.

Iniciamos às 8 horas e 13 minutos, pedindo aos alunos que se reunissem em apenas um grupo, já que estavam na aula apenas 9 alunos. Corrigimos oralmente as questões deixadas na aula anterior, sobre polígonos, perguntando como resolveram cada exercício. Não havendo dúvidas, demos sequência ao encontro relembrando os elementos da circunferência e resgatando o conhecimento prévio dos alunos.

Depois de relembrarmos também o conceito de raio, diâmetro e a diferença entre circunferência e círculo, fizemos a experiência de encontrar o valor de π medindo a circunferência em objetos que levamos; calculávamos a razão entre o comprimento e o diâmetro dos objetos. Cada aluno disse um objeto que mediu e qual foi o resultado encontrado, então organizamos em forma de tabela no quadro e calculamos a média aritmética das razões encontradas, chegando ao valor de 3,18. Falamos então que a razão que tínhamos calculado até então, resulta aproximadamente no valor de π. E com isso, mostramos como encontrar a medida da circunferência (perímetro), se soubermos o valor do raio.

Em seguida, solicitamos que resolvessem o primeiro exercício da lista que entregamos, precisavam calcular o comprimento de duas circunferências e compará-las.

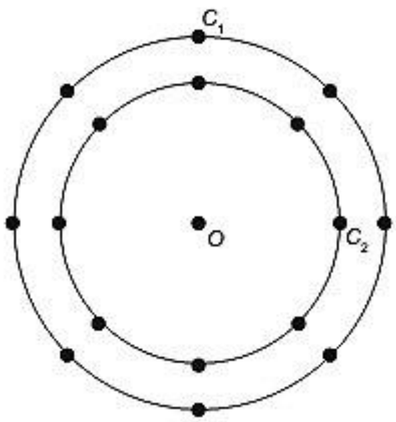
Falamos sobre corda, arco e setor circular e, então, mostramos o cálculo da área da circunferência por meio sua divisão em setores circulares, com o auxílio da demonstração disponibilizada na página Geometria intuitiva interativa, que usava o *software GeoGebra.* Solicitamos em seguida que resolvêssem o exercício dois, no qual precisavam calcular a diferença da área de duas circunferências.

O último conteúdo abordado foi ângulo central, e ângulo inscrito e a relação entre eles. Então pedimos para que dessem sequência à resolução da lista de exercícios. No final da aula distribuímos doces para os alunos e agradecemos a presença de todos que vieram até o final. Encerramos o encontro às 11 horas e 45 minutos.

14.3 MATERIAL ENTREGUE.

Lista de exercícios circunferência.

1- (Enem 2015) A figura é uma representação simplificada do carrossel de um parque de diversões, visto de cima. Nessa representação, os cavalos estão identificados pelos pontos escuros, e ocupam circunferências de raios 3 m e 4 m, respectivamente, ambas centradas no ponto O. Em cada sessão de funcionamento, o carrossel efetua 10 voltas.



Quantos metros uma criança sentada no cavalo C1 percorrerá a mais do que uma criança no cavalo C2, em uma sessão? Use 3,0 como aproximação para π.

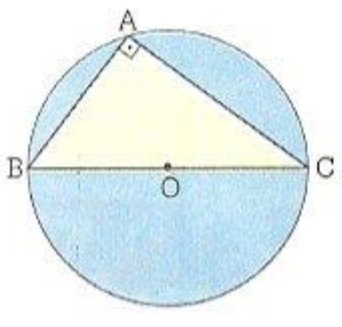
a) 55,5. b) 60,0.

c) 175,5. d) 235,5.

e) 240,0.

2-(Marinha 2016) Na figura abaixo, o triângulo ABC está inscrito na circunferência de centro O. Sabendo que AB= 4 cm e AC= $2\sqrt{5}$ cm, determine a medida do comprimento da circunferência.

Use $\pi = 3{,}14$



a) 18,84 cm. b) 12,05 cm.

c) 10,16 cm. d) 9 cm.

e) 3 cm.

3-(ENEM-2019) Em um condomínio, uma área pavimentada, que tem a forma de um círculo com diâmetro medindo 6m, é cercado por grama. A administração do condomínio deseja ampliar essa área, mantendo seu formato circular, e aumentando, em 8m, o diâmetro dessa região, mantendo o revestimento da parte já existente. O condomínio dispõe, em estoque, de material suficiente para pavimentar mais 100 m² de área. O síndico do condomínio irá avaliar se esse material disponível será suficiente para pavimentar a região a ser ampliada. A conclusão correta a que o síndico deverá chegar, considerando a nova área a ser pavimentada, é a de que o material disponível em estoque: Utilize 3 como aproximação para π.

a) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 21 m².

b) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 24 m².

c) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 48 m².

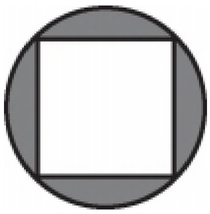
d) não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 108 m².

e) não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 120 m².

4-(ENEM-2014) Um homem, determinado a melhorar sua saúde, resolveu andar diariamente numa praça circular que há em frente à sua casa. Todos os dias ele dá exatamente 15 voltas em torno da praça, que tem 50 m de raio. Qual é a distância percorrida por esse homem em sua caminhada diária? Use 3 como aproximação para π.

a) 0,30 km. b) 0,75 km. c) 1,50 km. d) 2,25 km. e) 4,50 km.

5-(ENEM-2016) Um arquiteto deseja construir um jardim circular de 20 m de diâmetro. Nesse jardim, uma parte do terreno será reservada para pedras ornamentais. Essa parte terá a forma de um quadrado inscrito na circunferência, como mostrado na figura. Na parte compreendida entre o contorno da circunferência e a parte externa ao quadrado, será colocada terra vegetal. Nessa parte do jardim, serão usados 15 kg de terra para cada m^2. A terra vegetal é comercializada em sacos com exatos 15 kg cada. Use 3 como valor aproximado para π.



O número mínimo de sacos de terra vegetal necessários para cobrir a parte descrita do jardim é

a)100. b)140. c)200. d)800. e)1 000.

6-(ENEM 2017) A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas.

Caminhão entala em viaduto no Centro

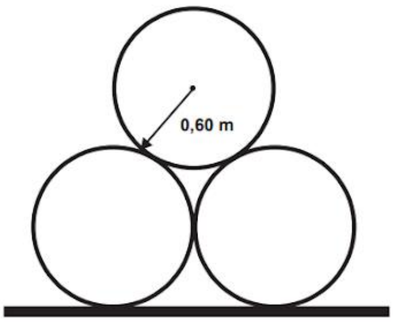
Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte de Pedra, na capital. Esse veículo vinha de São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.

Disponível em: www.caminhoes-e-carretas.com. Acesso em: 21 maio 2012 (adaptado).

Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja 0,60 m e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a 1,30 m do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.

A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, 0,50 m menor do que a altura do vão do viaduto.

Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?



Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

a)2,82. b)3,52.

c)3,70. d)4,02.

e) 4,20.

14.4 RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS.

1- (Enem 2015) A figura é uma representação simplificada do carrossel de um parque de diversões, visto de cima. Nessa representação, os cavalos estão identificados pelos pontos escuros, e ocupam circunferências de raios 3 m e 4 m, respectivamente, ambas centradas no ponto O. Em cada sessão de funcionamento, o carrossel efetua

10 voltas. Quantos metros uma criança sentada no cavalo C1 percorrerá a mais do que uma criança no cavalo C2, em uma sessão? Use 3,0 como aproximação para π.

a) 55,5. b) 60,0. c) 175,5. d) 235,5. e) 240,0.

Resolução: primeiramente devemos calcular a circunferência dos dois trajetos do carrossel. Carrossel de raio 3 m $C = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18\,m$, circunferência do carrossel de raio 4 m $C = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24\,m$. Como uma secessão possui 10 voltas, a criança no carrossel de raio 3 m percorrerá 180m e a criança no carrossel de 4 m percorrerá 240 m. Assim a criança no cavalo C2 percorrerá 240-180 = 60m a mais. Alternativa b).

2-(Marinha 2016) Na figura abaixo, o triângulo ABC está inscrito na circunferência de centro O. Sabendo que AB= 4 cm e AC= 2√5 cm, determine a medida do comprimento da circunferência. Use $\pi = 3{,}14$

a) 18,84 cm. b) 12,05 cm. c) 10,16 cm. d) 9 cm. e) 3 cm.

Resolução: para determinar a medida da circunferência precisamos determinar o diâmetro da circunferência. Para tal, utilizaremos do teorema de Pitágoras $R^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow R^2 = 4^2 + (2\sqrt{5})^2 \Rightarrow R^2 = 16 + 20 \Rightarrow R^2 = 36 \Rightarrow R = \sqrt{36} \Rightarrow R = 6\,m$. Assim o raio é 3m, para calcular a circunferência temos: $C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 = 18{,}84$. Alternativa a).

3-(ENEM-2019) Em um condomínio, uma área pavimentada, que tem a forma de um círculo com diâmetro medindo 6m, é cercado por grama. A administração do condomínio deseja ampliar essa área, mantendo seu formato circular, e aumentando, em 8m, o diâmetro dessa região, mantendo o revestimento da parte já existente. O condomínio dispõe, em estoque, de material suficiente para pavimentar mais 100 m² de área. O síndico do condomínio irá avaliar se esse material disponível será suficiente para pavimentar a região a ser ampliada. A conclusão correta a que o síndico deverá chegar, considerando a nova área a ser pavimentada, é a de que o material disponível em estoque: Utilize 3 como aproximação para π.

a) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 21 m².

b) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 24 m².

c) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 48 m².

d) não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 108 m².

e) não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 120 m².

Resolução: primeiramente vamos calcular a área que já está pavimentada, que corresponde a um círculo de raio 3 m: $A = 3 \cdot 3^2 = 27\ m^2$. Como temos de informação que o diâmetro aumentará em 8 m o novo raio será de: $\frac{8+6}{2} = 7\ m$. Agora podemos calcular a nova área que será pavimentada: $A = 3 \cdot 7^2 = 147m^2$. Vamos subtrair a nova área encontrada da primeira a fim de obter somente o espaço sem pavimento 147 – 27 = 120 m². Alternativa e).

4-(ENEM-2014) Um homem, determinado a melhorar sua saúde, resolveu andar diariamente numa praça circular que há em frente à sua casa. Todos os dias ele dá exatamente 15 voltas em torno da praça, que tem 50 m de raio. Qual é a distância percorrida por esse homem em sua caminhada diária? Use 3 como aproximação para π.

a)0,30 km. b)0,75 km. c)1,50 km. d)2,25 km. e)4,50 km.

Resolução: para descobrir precisamos determinar o perímetro da praça circular. $P = 2 \cdot 3 \cdot 50 = 300\ m$. Como o homem dá 15 voltas temos que seu percurso total é de 300 · 15 = 4500. Para encontrar a distância em Km: $\frac{4500}{1000} = 4{,}5\ Km$. Alternativa e).

5-(ENEM-2016) Um arquiteto deseja construir um jardim circular de 20 m de diâmetro. Nesse jardim, uma parte do terreno será reservada para pedras ornamentais. Essa parte terá a forma de um quadrado inscrito na circunferência, como mostrado na figura. Na parte compreendida entre o contorno da circunferência e a parte externa ao quadrado, será colocada terra vegetal. Nessa parte do jardim, serão usados 15 kg de terra para cada m^2. A terra vegetal é comercializada em sacos com exatos 15 kg cada. Use 3 como valor aproximado para π. O número mínimo de sacos de terra vegetal necessários para cobrir a parte descrita do jardim é

a)100. b)140. c)200. d)800. e)1 000.

Resolução: podemos observar que a diagonal do quadrado corresponde ao diâmetro da circunferência. Considere d como a diagonal do quadrado e l a medida do lado, assim temos que: $d^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow 20^2 = 2l^2 \Rightarrow 400 = 2l^2 \Rightarrow \frac{400}{2} = l^2 \Rightarrow 200 = l^{2.}$ Como l^2corresponde a área do quadrado temos que a alternativa correta é a letra a.

6-(ENEM 2017) A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas.

Caminhão entala em viaduto no Centro

Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte de Pedra, na capital. Esse veículo vinha de São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.

Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja 0,60 m e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a 1,30 m do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.

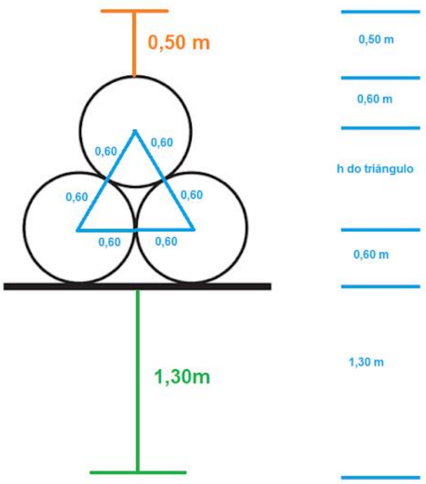
A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, 0,50 m menor do que a altura do vão do viaduto. Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

a)2,82. b)3,52. c)3,70. d)4,02. e) 4,20.

Resolução: observe a figura abaixo para solução do exercício.

Figura 31 altura do caminhão.



Fonte: www.exercicios-resolvidos.com/2019/08/enem-2017-manchete-demonstra-que-o.html

Altura mínima do viaduto H = 1,30+0,50+0,60+0,60+h do triângulo.

Altura do triângulo equilátero se dá: $h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{1{,}2 \cdot 1{,}7}{2} \Rightarrow 1{,}02$. Assim temos H = 1,30+0,50+0,60+0,60+1,02 = 4,2, alternativa d.

15. PROJETO DO DIA NACIONAL DA MATEMÁTICA.

INTRODUÇÃO

Essa proposta tem por objetivo descrever as atividades a serem desenvolvidas em comemoração ao Dia Nacional da Matemática, elaborado como trabalho complementar de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática – Estágio Supervisionado I, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná.

Nossa intenção com esse projeto é divulgar o Dia Nacional da Matemática, comemorado no dia 6 de maio em todo território nacional. Vamos explicar a criação e o objetivo desse dia especial para a educação. Junto da divulgação, vamos aplicar uma série de atividades que trabalham com conteúdo matemáticos já vistos pelos discentes, mas com uma abordagem mais didática e lúdica, de modo a promover interesse nos alunos pela disciplina de Matemática.

Essa proposta será aplicada no Colégio Estadual Olinda Truffa de Carvalho nas turmas de 6° ao 9° ano, no período da manhã e da tarde, pelos discentes do terceiro ano: André L. Z. da Cruz; Cleison R. Sotel; Fernanda Guerra; Jheniffer Rafaelly Vieira; William F.de O. Pinheiro. O Dia Nacional da Matemática tem objetivo trazer reflexões a respeito da educação matemática, apresentar novos modelos de ensino e aprendizagem, e resgatar o interesse dos alunos pela disciplina.

O dia 06 de maio foi escolhido em homenagem ao nascimento do matemático, escritor e educador brasileiro, Júlio César de Mello e Souza, mais conhecido por seu pseudônimo, Malba Tahan. Há tempos que essa data já era comemorada informalmente no país, mas foi em 26 de junho de 2013 que a Presidenta da República, Dilma Rousseff, sancionou a lei n° 12.835, que instituiu que o Dia Nacional da Matemática deveria ser comemorado anualmente em todo território nacional.

OBJETIVOS GERAIS

- Divulgar o Dia Nacional da Matemática e promover a integração dos alunos;
- Realizar atividades lúdicas e dinâmicas envolvendo conteúdos de matemática;
- Constatar a importância de Malba Tahan na história da Matemática e da Educação Matemática;
- Ter um momento de recreação, trabalhando a matemática de forma divertida e interessante.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Com a realização do plano em questão, objetivamos que os alunos possam

- Compreender a importância do Dia Nacional da Matemática, sua origem e relação com o professor Júlio Cesar de Mello e Souza, além da lei federal que rege desde 2013;
- Conhecer a história de Malba Tahan, sua principal obra e notar a relação entre o estudo de frações com o problema dos 21 vasos, como um exemplo de situação cotidiana;
- Ter um momento para aplicar e praticar as operações básicas da matemática com atividades lúdicas;

PÚBLICO-ALVO: Esse projeto está destinado a alunos do Ensino Fundamental entre o 6° ao 9° ano, nos períodos da manhã e da tarde do Colégio Olinda Truffa de Carvalho. As atividades dispostas para esse dia, abordam conteúdos já estudados por ambos os anos, porém em níveis de dificuldades diferentes, como as quatro operações básicas.

CRONOGRAMA: O projeto possui um tempo de execução de 8 horas, ocorrendo em toda a parte da manhã e da tarde.

ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO:

Inicialmente, durante o horário da aula de matemática, faremos uma breve introdução sobre o Dia Nacional da Matemática, apresentando a criação e objetivos dessa data. Um tempo de 10 minutos será necessário para essa introdução.

Em seguida, será proposto que resolvam individualmente a atividade introdutória listada abaixo, retirada da obra de Júlio Cesar de Mello e Souza. Essa atividade inicial foi escolhida por trabalhar com a operação de soma com quantidades inteiras e fracionárias, podendo ser resolvida por tentativa, usando desenhos e os cartões disponibilizados, ou trabalhando com operações com frações.

Após o tempo de 15 minutos para resolverem, vamos convidar algum aluno a expor oralmente sua resolução. Caso ninguém se ofereça, explicaremos a resolução no quadro, um tempo de 10 minutos será gasto nessa exposição.

No próximo momento, vamos organizar as carteiras da sala para colocar as cinco atividades do circuito planejado abaixo. Pediremos que se organizem em grupos de cinco elementos, podendo ser de seis dependendo da quantidade de alunos, desde que haja uma quantidade par de grupos.

Explicaremos que organizamos uma competição entre os grupos valendo uma caixa de bombom como prêmio para ser dado no final da atividade para o primeiro colocado. Como prêmio de participação, cada aluno vai receber um bis de chocolate.

Em cada uma das cinco atividades selecionadas, estarão dois grupos competindo pelos pontos que cada atividade distribui ao vencedor.

Para cada atividade, separamos um tempo de 15 minutos e ao final do circuito, vamos contar os pontos de cada grupo e premiar os vencedores.

1°Momento: Apresentação do Dia Nacional da Matemática.

Primeiramente, vamos pedir que os alunos ouçam a breve explicação sobre o Dia Nacional da Matemática, para que entendam a importância desta data. Vamos antes disso, perguntar a classe se eles já possuem algum conhecimento a respeito desse dia que queira compartilhar. Um tempo de 10 minutos será gasto nessa apresentação, logo após vamos seguir para a atividade dos 21 jarros.

Júlio Cesar de Mello e Souza e Malba Tahan

Para falar sobre o Dia Nacional da Matemática, é essencial comentarmos sobre o professor, escritor e educador matemático brasileiro Júlio Cesar de Mello e Souza. Nascido no Rio de Janeiro em 06 de maio de 1895, Júlio Cesar começou a lecionar com apenas 18 anos, formou-se em Engenharia Civil, mas nunca exerceu sua profissão. Em vez disso, dava aulas de Matemática e buscava sempre criar técnicas de ensino com o objetivo de tornar essa disciplina mais atrativa para seus alunos, usando jogos, histórias, problemas e desafios matemáticos.

No ano de 1925, em suas primeiras tentativas de publicações, Júlio Cesar não obteve sucesso, enviou cinco textos ao editor do jornal “O imparcial”, que nunca os notou. Então ele teve a ideia de reenviar esses textos usando um codinome, R. S. Slade, tomou o cuidado de criar um passado para esse nome, dizendo que pertencia a um famoso autor de Nova York. No dia seguinte, um de seus textos estava na primeira página.

Essa experiência fez com que Júlio Cesar, apaixonado pela cultura árabe, criasse outro pseudônimo para a publicação de suas obras, Malba Tahan. Para dar credibilidade ao novo personagem, ele escreveu uma pequena biografia: Ali lezid Izz-Edim Ibn Salim Hank Malba Tahan, um famoso escritor árabe que nasceu na aldeia de Muzalit, em 1885, recebeu uma herança de seu pai, foi prefeito de El Medina, estudou em Istambul e no Cairo e faleceu em uma batalha em 1921.

Nesse mesmo ano, o professor Júlio Cesar publicou seu primeiro livro, chamado "Contos de Malba Tahan". A primeira edição dessa obra ele assinou com seu próprio nome, tendo Malba Tahan apenas no título. Mas, em sua segunda edição, no entanto, o próprio Malba Tahan era o autor.

Em 1927, ele publicou seu segundo livro, "Céo de Allah", também assinado pelo autor árabe, que acabou sendo premiado pela Academia Brasileira de Letras. Ainda na década de 20, no ano de 1929, publicou os livros "Amor de Beduíno" e "Lendas do Deserto". Em 1931, o livro "Mil histórias sem fim" inaugurou o novo elenco de títulos que viriam a ser editados.

Júlio César escreveu ao longo de sua vida mais de 120 publicações, sendo 51 delas voltadas à Matemática. Sua obra de maior destaque veio em 1938 sendo "O homem que calculava", livro que ele apresenta, por meio das proezas do personagem persa Beremiz Samir que se devota aos cálculos matemáticos, explorando uma infinidade de questões e desafios matemáticos, seguindo o estilo das narrativas do clássico Mil e Uma Noites.

Dia Nacional da Matemática e a Lei Federal n° 12.835

Foi em 1995 que um grupo de especialistas na vida e obra Malba Tahan, em comemoração ao centenário do grande escritor, propuseram a criação do dia da Matemática. Neste mesmo ano, foi aprovado pela Assembleia Legislativa do Rio de Janeiro e pela Câmara Municipal de São Paulo a criação da data comemorativa, no Estado do Rio de Janeiro e no Município de São Paulo.

Em 2004, a deputada Raquel Teixeira propôs um projeto de Lei ao Congresso Nacional para que o Dia Nacional da Matemática fosse celebrado em 6 de maio. A proposta não só homenageia a disciplina de Matemática, como propõe um momento de reflexão acerca do ensinar e do aprender, bem como incentivos por parte do Governo para a promoção de atividades culturais e educativas.

Foi apenas em 2013, no dia 26 de junho, a presidenta Dilma Rousseff sancionou a lei 12.835, que instituiu oficialmente o Dia Nacional da Matemática. O dia 6 de maio foi escolhido em homenagem a Malba Tahan.

O tempo previsto para esta atividade introdutória é de aproximadamente 10 minutos. Ao fim da atividade, será aberto um espaço para possíveis dúvidas e perguntas dos estudantes sobre o assunto abordado. Em seguida, a turma será dividida em quatro grupos, que revisarão entre as atividades a seguir.

2° Momento:

- **Grupo 1: Problema dos 21 vasos e sua resolução.**

Para o problema dos 21 vasos, vamos separar um tempo de 20 minutos para apresentação da atividade e para que consigam resolver. Após esse período, um professor vai passar a resolução no quadro.

Atividade Introdutória: Problema dos 21 vasos.

Contaremos a história para os alunos, utilizando de materiais manipulativos para melhor compreensão do problema. O problema foi retirado do livro *O Homem que calculava*.

“Aqui estão, ó calculista, os três amigos. São criadores de carneiros em Damasco. Enfrentam agora os problemas mais curiosos que tenho visto. E esse problema é o seguinte: Como pagamento de pequeno lote de carneiros, receberam aqui, em Bagdá, uma partida de vinho, muito fino, composta de 21 vasos iguais, sendo:

- 7 cheios
- 7 meio cheios
- 7 vazios.

Querem agora dividir os 21 vasos de modo que cada um deles receba o mesmo número de vasos e a mesma porção de vinho. Repartir os vasos é fácil. Cada um dos sócios deve ficar com sete vasos. A dificuldade a meu ver, está em repartir o vinho sem abrir os vasos, isto é, conservando-os exatamente como estão. Será possível, ó calculista, obter uma solução para este problema?”

Após os alunos ouvirem a história narrada por nós, disponibilizaremos cartões anexo I, para simbolizar os 21 vasos. Diremos então que agora eles serão os calculistas e que devem solucionar o problema dos vasos, de modo que a divisão obedeça às condições impostas no problema. Quando percebermos que uma maioria já obteve uma solução, solicitaremos que compartilhem suas soluções, e por fim terminaremos a história com o problema solucionado.

"Beremiz depois de meditar em silêncio durante dois ou três minutos, respondeu:

-A divisão dos 21 vasos, que acabais de apresentar, ó Xeque, poderá ser feita sem grandes cálculos. Vou indicar a solução que me parece mais simples.

Ao primeiro sócio caberão:

- 3 vasos cheios;
- 1 meio cheio;
- 3 vazios;

Receberá desse modo, um total de 7 vasos. Ao segundo sócio caberão:

- 2 vasos cheios;
- 3 meio cheios;
- 2 vazios;

Este receberá também 7 vasos. A cota que tocará ao terceiro será igual à do segundo isto é:

- 2 vasos cheios;
- 3 meio cheios;
- 2 vazios;

Segundo a partilha que acabo de indicar, cada sócio receberá 7 vasos e a mesma porção de vinho. Com feito. Chamemos de 2 a porção de vinho com um vaso cheio, e 1 a porção de vinho do vaso meio cheio. O primeiro sócio de acordo com a partilha, receberá:

2 + 2 + 2 + 1. Essa soma é igual a 7 unidades de vinho. E cada um dos outros dois sócios receberá:

2 + 2 + 1 + 1 + 1. E essa soma é também igual a 7 unidade de vinho.

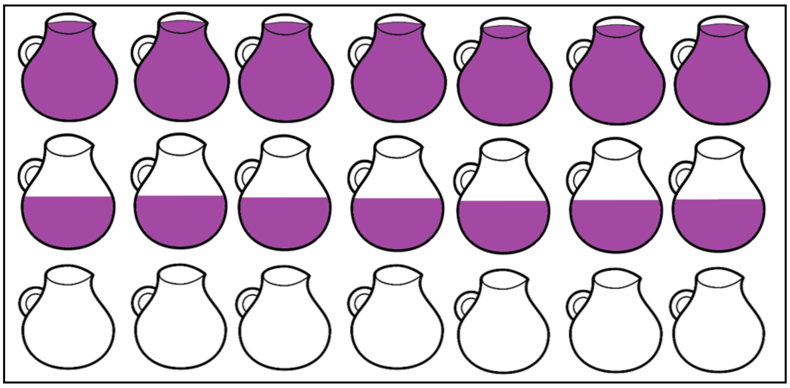
E isso vem a provar que a divisão por mim sugerida é certa e justa. O problema que na aparência é complicado, não oferece dificuldade quando resolvido numericamente.

A solução apresentada por Beremiz foi recebida com muito agrado, não só pelo Xeque, como também pelos seus amigos damascenos.

- Por Álah! – Exclamou o jovem da esmeralda. – Esse calculista é prodigioso! Resolveu de improviso um problema que nos parecia dificílimo.

Cartão para auxílio:

Figura 32 cartão para visualização do problema.



Fonte: Autores (2022).

2° Momento: Circuito de jogos e distribuição de prêmio.

Circuito de Jogos

Em seguida, vamos dividir a turma em no máximo cinco grupos e, cada grupo se ocupará com uma das atividades listadas abaixo. Daremos um tempo de 15 minutos para realizar cada atividade e depois solicitaremos que troquem entre os grupos, assim todos vão conseguir realizar uma atividade distinta. Se a turma tiver duas aulas disponíveis, planejamos aplicar todas as atividades abaixo, mas se a turma tiver apenas uma aula disponível, vamos aplicar apenas duas das atividades abaixo. Essas duas atividades seriam o Tangram e a Torre de Hanoi.

ATIVIDADE 1: Jogo avança com o resto.

Regra do jogo: o objetivo do jogo é chegar em primeiro lugar ao espaço com a palavra FIM. O grupo que chegar nessa mesa será redividido em duplas, a fim de agilizar as rodadas do jogo, os integrantes da dupla movimentam a sua ficha colocada, inicialmente, na casa com o número 43. Cada dupla, na sua vez, joga o dado e constrói uma divisão em que:

* O dividendo é o número da casa onde sua ficha está; e o divisor é o número de pontos obtidos no dado.

Em seguida, calcula-se o resultado da divisão e movimenta a própria ficha numa quantidade de vezes equivalente ao número de casas igual ao resto da divisão. A equipe que efetuar o cálculo errado perde sua vez de jogar. Cada equipe deverá obter um resto que a faça chegar exatamente à casa marcada com FIM, sem ultrapassá-la.

Vence a equipe que chegar em primeiro lugar ao espaço com a palavra FIM. A equipe que ganhar vai receber 200 pontos como prêmio, e a equipe derrotada vai receber apenas 100 pontos. Caso os 15 minutos passe antes de haver um vencedor, ganha o grupo que estiver mais avançado na trilha.

Trilha dos restos:

Figura 33: trilha dos restos.

Fonte: Professor Cristiano dos Santos (http://profcristianosantos.blogspot.com/2013/03/trilha-do-resto-operacoes-divisao.html).

ATIVIDADE 2: Quadrados mágicos

Um quadrado mágico é uma tabela quadrada com n linhas e n colunas, ela é composta por números e cada linha, coluna e diagonal possui o mesmo valor ao somarem. Além disso, em toda tabela, nenhum número é repetido. Esse jogo foi escolhido por ajudar no desenvolvimento do raciocínio lógico, na organização numérica em relação à utilização de operações matemáticas e por utilizar somente a operação de soma, da qual eles estão mais habituados. Nessa atividade os alunos devem buscar o posicionamento adequado, seguindo a regra da soma constante em cada linha, coluna e diagonal.

Um exemplo de quadrado mágico seria o de três linhas por três colunas, apresentado nove células para preenchimento com os algarismos de um a nove. A soma de cada linha, coluna e diagonal, resultaria sempre no número 15.

Quadrado mágico de lado três:

Figura 34: quadrado mágico de lado três:

15	15	15	15	15
15	2	9	4	15
15	7	5	3	15
15	6	1	8	15
15	15	15	15	15

Fonte: Autores (2022).

Com essa atividade, os alunos poderão perceber, com ou sem interferência do docente, da relação numérica chamada paridade. Essa relação é responsável pelas seguintes situações:

- A soma entre dois números pares resulta em um número par;
- A soma entre dois números ímpares resulta em um número par;
- A soma entre um número par e um número ímpar resulta em um número ímpar;

Conhecendo a paridade, a complexidade que essa atividade inicialmente apresentava se torna mais fácil, uma vez que se sabe que as somas devem dar sempre 15, precisa vir da soma entre dois números que resulta em um número par com apenas um número ímpar. Em um quadrado com quatro linha e quatro colunas, devemos alocar as 16 células com números do um ao dezesseis, com a soma de cada linha e coluna resultando no número 34. Eles podem somar em cada linha e coluna dois números pares com dois números ímpares.

Quadrado mágico de lado quatro:

Figura 35: quadrado mágico de lado quatro.

34	34	34	34	34	34
34	1	14	15	4	34
34	12	7	6	9	34
34	8	11	10	5	34
34	13	2	3	16	34
34	34	34	34	34	34

Fonte: Autores (2022).

Essa atividade fará parte do percurso de cinco atividades que será disputada entre dois grupos. Cada grupo receberá dois quadrados mágicos, um de três por três e outro e quatro por quatro. Os quadrados mágicos foram quase todos completados, faltando apenas cinco espaços nos dois tipos de quadrados. Por terem que ser resolvidos também pelas diagonais, restando apenas uma solução para cada quadrado.

Ganha o grupo que completar e entregar os dois quadrados mais rápido. Essa atividade vai valer 100 pontos, com quinze minutos de duração no total. Caso um grupo, no final desse tempo tenha terminado apenas um quadrado mágico, eles vão receber 50 pontos, e caso não tenham terminado nenhum até o final do tempo, o grupo não vai receber pontos.

ATIVIDADE 3:Tangram

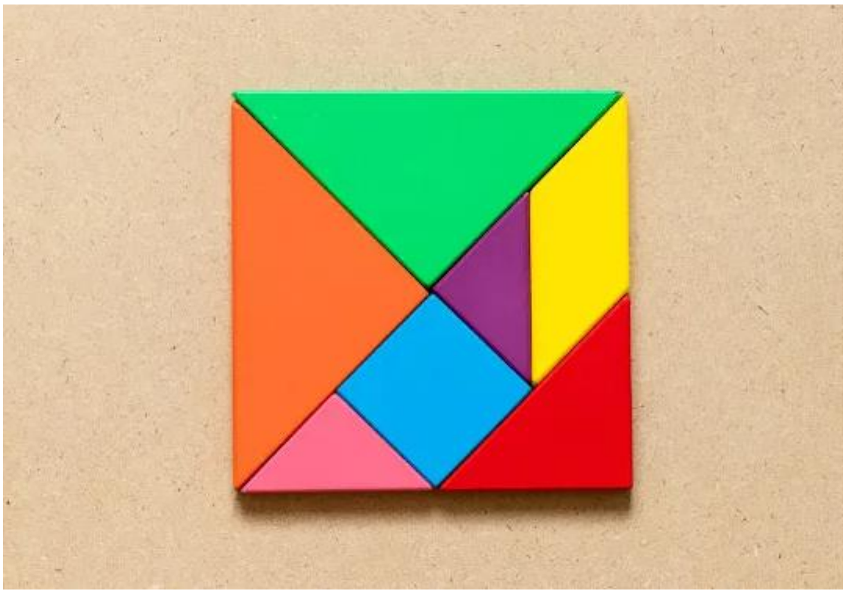
O Tangram é considerado um jogo de origem chinesa; é um quebra cabeça composto de sete peças (5 triângulos, 1 quadrado e 1 paralelogramo), com as quais é possível montar diversas figuras. Embora sua origem seja incerta, uma lenda diz que se originou quando um imperador quebrou um espelho, e ao ajuntar os pedaços percebeu que podia formar várias figuras. Para usar o Tangram não é necessário grandes habilidades, apenas tempo, paciência e criatividade, pois com ele é possível formar mais de 1000 figuras. As únicas regras são: todas as peças devem ser utilizadas nas composições e, não é permitida a sobreposição de peças.

Para a utilização no projeto do Dia Nacional da Matemática, propomos desafiar os alunos participantes a confeccionar algumas figuras com as peças do Tangram.

Por exemplo, pediremos para que montem um barco, e então verificamos se a figura parece um barco. Outro desafio seria o de pedir que montem a figura do Tangram com o menor perímetro possível, ou ainda perguntar informações sobre as peças do Tangram. Afinal, dos cinco triângulos, dois são grandes, um médio e, dois pequenos e, seus tamanhos são proporcionais, pois, o médio é metade do grande e, o pequeno é metade do médio.

Vamos trabalhar essa atividade duas vezes, usaremos duas mesas na sala para trabalhar com a atividade de Tangram, e em cada mesa terá uma figura diferente para montar. A pontuação do Tangram será atribuída 100 pontos a equipe que primeiro concluir o desafio.

Figura 36: tangram.



Fonte: https://escolakids.uol.com.br/matematica/tangram.htm

ATIVIDADE 4: Torre de Hanói

A torre de Hanói é um jogo de estratégia capaz de desenvolver raciocínio lógico e o desenvolvimento da memória. O jogo consiste em uma base onde estão fixados três pinos A, B e C na posição vertical, e um certo número de discos de diâmetros diferentes, com um orifício no centro. Para iniciar o jogo todos os discos devem estar no primeiro pino A, com todos os discos empilhados sobre ele em ordem decrescente de tamanho, com o menor disco acima de todos. O objetivo do jogo é passar todos os discos para o pino C, com a ajuda do pino B obedecendo as seguintes regras O jogo constituído por três pinos é o mais simples, porém essa quantidade pode variar, podendo deixar jogo mais difícil à medida que for aumentado a quantidade de discos:

- Pode-se mover apenas um disco por vez.
- Um disco maior nunca pode ser posto sobre um disco maior.

Figura 37: torre de Hanói.

Fonte: Disponível em: https://www.matematica.pt/fun/torre-hanoi.php. Acesso em: 14 abr. 2022.

A torre de Hanói tem sido tradicionalmente considerada como um procedimento para avaliação da capacidade de memória de trabalho, e principalmente de planejamento de situações problemas.

Será atribuída uma pontuação de100 pontos para o grupo que concluir e 50 pontos para o grupo que não concluir o desafio.

CRONOGRAMA

O projeto será composto de 8 horas/aula, conforme a tabela a seguir.

Manhã	Tarde
8ºA	6ºC
8ºA	6ºC
9ºB	7ºB
7ºA	7ºB
9ºA	6ºA

RESULTADOS ESPERADOS

A partir desse projeto, pretendemos conscientizar os alunos sobre o Dia da Matemática, ressaltando a importância do educador e escritor Júlio Cesar de Mello e

Souza na criação dessa data. Além disso, através das atividades de sua obra “O homem que calculava” esperamos que vejam a aplicação das operações básicas em problemas diários e a partir das atividades do circuito, possam melhorar a base matemática sobre essas quatro operações, enquanto desenvolvem o raciocínio logico e se divertem.

REFERÊNCIAS

DANTAS, Tiago. Tangram. **Mundo educação**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/curiosidades/tangram.htm. Acesso em: 14 abr. 2022.

JOGO AVANÇA COM O RESTO. Disponível em: https://mathema.com.br/jogos-e-atividades/avancando-com-o-resto/. Acesso em: 14 abr. 2022.
MUSEU DE MATEMÁTICA DA UFMG. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/museu/> Acesso em: 14 abr. 2022.

TAHAN, M. **O Homem que calculava**. Rio de Janeiro: Record, 2010.

NOÉ, Marcos. Solucionando quadrados mágicos. **Brasil Escola**. Disponível em: https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/solucionando-quadrados-magicos.htm. Acesso em: 15 abr. 2022.

LOPES, Tânia Isabel Duarte. **A História dos Quadrados Mágicos**. Departamento de Matemática. Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade de Coimbra. Disponível em: http://www.mat.uc.pt/~mat0717/public_html/Cadeiras/1Semestre/O%20que%20%C3%A9%20um%20quadrado%20m%C3%A1gico.pdf. Acesso em: 15 abr. 2022.

GOUVEIA, Rosimar. Dia Nacional da Matemática. **Toda Matéria**. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/dia-nacional-da-matematica/. Acesso em: 19 abr. 2022.

Dia Nacional da Matemática, um caminho para a inclusão social e a melhoria do ensino. Disponível em: https://www.gov.br/cnpq/pt-br/assuntos/noticias/destaque-em-cti/dia-nacional-da-matematica-um-caminho-para-a-inclusao-social-e-a-melhoria-do-ensino. Acesso em: 19 abr. 2022.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. 06 maio Dia Nacional da Matemática. **Mundo Educação**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/datas-comemorativas/06-maio-dia-nacional-matematica.htm. Acesso em: 19 abr. 2022.

VIDA E OBRA MALBA TAHAN. Disponível em: https://www.malbatahan.com.br/contato/. Acessado em: 19 abr. 2022

SANTANA, Ana Lucia. Malba Tahan. **Info Escola**. Disponível em: https://www.infoescola.com/biografias/malba-tahan/. Acesso em: 19 abr. 2022.

TAHAN, Malba. **O homem que calculava**. São Paulo: Círculo do Livro AS, 1987.

15.1 RELATÓRIO DIA NACIONAL DA MATEMÁTICA.

TURMA: 8° ano A, duas horas-aula, 7h10min – 8h50min Sala 5

A primeira turma que seguimos apresentando o projeto foi o 8° ano A, na sala 5. Essa turma possuia duas aulas de 50 minutos, então conseguimos seguir com toda a programação do projeto. A turma era composta por 28 alunos e a regente era a professora Almira Vieira.

Em uma primeira impressão, a turma ficou agitada com a nossa chegada trazendo os jogos. Começamos nos apresentando para a turma como alunos do terceiro ano da Unioeste do curso de Licenciatura em Matemática, em seguida, pedimos que todos os discentes se apresentassem falando seus nomes.

Todos eles se apresentaram, e no momento seguinte, um estagiário começou a falar sobre o Dia Nacional da Matemática, comentando sobre sua instauração em todo território nacional em 2013 pela presidenta Dilma Rousseff que sancionou a Lei de n° 12.835. Abordamos então um breve resumo da vida de Julio Cesar de Mello e Souza, o surgimento do nome Malba Tahan e da sua principal obra, "O Homem que Calculava". Durante a explicação, os alunos se mantiveram em silêncio, ouvindo a história de origem da data. Na sequência pedimos que resolvessem o problema dos 21 vasos, que também está presente nesse livro. Uma das estagiárias seguiu apresentando o enunciado desse problema, respondendo as dúvidas que os discentes tinham, tais como, se poderiam quebrar o vaso de vinho ou abri-lo ou deixar um vaso fora da divisão.

Antes deles resolverem o problema, dividimos a sala em quatro grupos de sete elementos. Vale destacar que um aluno não queria fazer grupo com determinado aluno, mas depois ele aceitou participar. Após os grupos serem formados, entregamos para cada, um pacote contendo 21 figurinhas que representava os sete vasos cheios, sete vasos meio cheios e sete vasos vazios.

Demos um tempo de 15 minutos para os grupos resolverem e todos conseguiram, alguns grupos apresentaram certa dificuldade na separação dos vasos, mas depois de aconselharmos a pensar em 1 litro em cada vaso cheio e um vaso meio cheio com meio litro, logo conseguiram apresentar uma resolução.

Convidamos os grupos a falarem suas respostas e tivemos dois resultados distintos, mas ambos estavam corretos. O grupo vencedor dessa atividade, conseguiu 100 pontos, e os outros grupos ganharam 50 pontos.

Em seguida, pedimos que os alunos saíssem da sala com calma e se dirigissem para o refeitório onde preparamos quatro mesas com as atividades programadas, sendo: Torre de Hanoi, Trilha dos restos, Quadrados mágicos e Tangram. Em cada atividade, havia um estagiário que explicava o objetivo, tirava dúvidas, orientava o desenvolvimento dos alunos com questionamentos, como por exemplo, nos quadrados mágicos, questionando se a soma feita por eles estava correta. Todos os grupos conseguiram realizar as atividades, mas nem todos os grupos conseguiram completar elas totalmente. No quadrado mágico, houve um grupo que errou a posição dos números no quadrado magico quatro por quatro. Tivemos dois grupos que tiveram o mesmo resultado, então precisamos pensar em uma forma de decidir um vencedor, escolhemos levar em conta a quantidade de casas que conseguiram avançar no jogo trilha dos restos.

Ao voltarmos para a sala de aula, escrevemos no quadro o resultado do circuito e indicamos o grupo vencedor. Todos os alunos receberam um pirulito como agradecimento por participar da aula e cada aluno do grupo vencedor recebeu um bombom como prêmio. Terminamos nossa aula faltando poucos minutos para às oito horas e quarenta minutos, nos despedimos da sala e partimos em direção a sala 12 para trabalhar com o 9° ano B.

Turma: 9° ano B, uma hora-aula, 8h50min – 9h40min Sala 12

Já na sala do 9° ano B, os alunos ficaram um pouco alterados com nossa chegada, sendo necessário que a professora regente Rejane pedisse que a sala ficasse em silêncio. Com a sala controlada, seguimos um roteiro semelhante ao da aula anterior, mas no decorrer da aula, tivemos que realizar algumas alterações.

Começamos nos apresentando como alunos da Unioeste e pedimos que eles se apresentassem também falando o nome. Em seguida, um estagiário comentou sobre o Dia Nacional da Matemática, e assim como na outra sala os alunos ouviram a explicação.

A sala possuía 26 alunos, separamos eles em cinco grupos, sendo quatro deles com cinco educandos, e uma menina que escolheu trabalhar sozinha no problema dos 21 vasos. Entregamos os envelopes com as 21 figurinhas de vasos cheios, meio cheios e vazios e demos um tempo de 15 minutos para a resolução do problema. Enquanto pensam na resolução, todos os estagiários estavam andando pela sala atendendo possíveis dúvidas e orientando através de questionamentos. O último grupo a finalizar estava anteriormente tentando separar o vinho para cada amigo em uma quantidade inteira, mas com nossa orientação, logo perceberam que isso não era necessário. Sabendo que a quantidade não precisaria ser inteira, tentaram verificar se com dois litros e meio de vinho já seria suficiente para a separação, quando chegaram a conclusão que não era, decidiram aumentar um litro para cada amigo, chegando na resolução do problema.

Todos os cinco grupos conseguiram finalizar a tarefa, mas apenas uma única forma de solução foi encontrada pela sala. Importante citar que durante essa aula, a professora orientadora precisou sair por motivos familiares, retornando com nossa observação no período da tarde.

Por conta de ser apenas uma aula e já estar perto do horário do recreio, informamos no quadro o grupo vencedor e presenteamos eles com bombons, todos os alunos em seguida receberam um pirulito como agradecimento por participar, decidimos entre nos estagiários de dar dois pirulitos para a aluna que realizou a atividade sozinha pela sua dedicação. Saímos da sala de aula com o sinal do recreio e retornamos com o projeto nos dois últimos períodos.

Turma: 7° ano A, uma hora-aula, 9h55min – 10h45min Sala 15

As 9h55min foi realizado o projeto no sétimo ano turma A sobe responsabilidade da professora Almira, que foi a terceira turma em que realizamos o projeto no dia, por ser a primeira aula depois do intervalo, demorou um pouco, para que todos os alunos estivessem presentes, esperamos até que a maioria estivesse na sala, para então nos apresentarmos, então contamos aos alunos, o motivo de estarmos ali, naquele dia em especial. Após nos apresentarmos e, contarmos um pouco da história do Júlio Cezar de Mello e Souza (Malba Tahan), sua importância para educação matemática no Brasil, como a escola em que estudam, no início se chamava colégio Malba Tahan, explicamos que essa data foi escolhida para o homenagear.

Após a introdução, começamos a dinâmica da história dos 21 vasos, onde contamos a história, e ilustramos mostrando as garrafinhas cheias de água colorida, que simbolizava o vinho, então dividimos os alunos em grupos, para que eles começassem a pensar sobre o problema, apesar de alguns atritos entre os alunos, que não queriam estar no mesmo grupo, nossa posição foi firme e permaneceu o nosso critério de que se agrupassem por proximidade não por afinidade.

Depois do agrupamento, distribuímos para cada grupo 21 figuras de vasos, sendo sete cheios, sete meio cheios e sete vazios, e auxiliamos os grupos na resolução, escutando o raciocínio de cada um, e respondemos seus questionamentos, com perguntas como "o que queremos dividir entre os três amigos?", "Qual é o total de vinho, quanto cada um deve ganhar?", "Quantas metades existem em cada vaso?". Os alunos demonstraram bastante interesse em participar da atividade, e ficaram satisfeitos em conseguir resolver o problema, acredito que a experiência tenha sido significativa, no que diz respeito a conseguir compreender o problema e resolvê-lo.

Turma: 9° ano A, uma hora-aula, 10h45min – 11h35min Sala 11

Fomos até a sala 11 que estavam os alunos do 9° ano turma A, a presença dos estagiários influenciou o comportamento da classe, alguns já exclamando que a turma deveria ganhar prêmios assim como as outras turmas, visto que a aula era após o recreio e, os demais alunos haviam comentado sobre o projeto que estávamos aplicando naquela manhã com as turmas que tinham aula matemática. Assim muito entusiasmados com o possível prêmio, eles se dispersam e criam um ambiente conturbado, logo que todos estavam presentes a professora Rejane os acalmou, passamos então para as atividades programadas.

Durante a exposição da história do dia da matemática, bem como de Júlio Cesar de Mello e Souza (Malba Tahan), eles demostraram estar interessados no assunto. Quando aberto a posicionamentos por parte dos alunos, em relação ao Dia da Matemática, alguns levantaram dúvidas, se nesta data era comemorado o aniversário de Albert Einstein, se este era o inventor da matemática ou ainda exclamaram ser o dia do primeiro professor de matemática. Um dos estagiários tomou a palavra e explicou todas as dúvidas, apresentou brevemente que em outros países eram comemorado este dia em outras datas e outras abordagens para o dia. Finalizado a história do atual dia, passamos para a apresentação da problematização.

O problema dos 21 vasos, conforme previsto no projeto, uma das estagiárias apresentou a eles, contextualizando o problema, e explicando que eles terão que resolvê-lo. Dividimos em sete grupos de quatro participantes, tendo presentes em aula um total de 28 alunos. Após todos posicionados em grupos, distribuímos os cartões para auxiliar a resolução. Em seguida começaram a buscar soluções para o problema, nós seguimos circulando pela sala, buscando tirar possíveis dúvidas dos grupos; alguns grupos tinham mais dificuldades, eles precisavam de um maior tempo de auxílio dos estagiários, que se faziam presente buscando não entregar a solução, mas ajudá-los a chegarem sozinhos.

Passado algum tempo superior ao estimado por nós todos os grupos chegaram em uma solução. Para a premiação foi adotado que o grupo que primeiro solucionar o problema seria vencedor, contudo, houve dois grupos que apresentaram um conflito, não convencidos da decisão nossa de que um dos grupos teria solucionado primeiro, insistiram que tinham vencido, como tínhamos prémios sobrando, decidimos premiar ambos os grupos, porém elegendo um dos grupos como vencedor, levando em consideração as observações dos estagiários. Após a entrega dos pirulitos pela participação e os bombons pela vitória, agradecemos a participação e demos por encerrado o projeto naquela sala, como planejado o horário da aula finalizou-se também neste momento.

Turma 6° ano C, duas horas-aula, 13h10min – 14h50min Sala 5

Iniciamos a tarde desenvolvendo o projeto na sala do 6° C da professora Rejane, na qual havia 21 alunos presentes, tínhamos disponíveis duas horas/aulas para execução. A turma estava bem agitada com nossa presença, e levou alguns minutos até que se acalmassem e se sentassem para nos ouvir. Percebemos que havia uma professora PAEE[1] responsável por cinco alunos, todos se sentavam ao redor dela com o objetivo de receberem auxílio durante as aulas.

O início ocorreu de maneira semelhante ao das demais turmas, adaptamos a linguagem usada por se tratar de alunos menores. Após contarmos a história dividimos os alunos em quatro grupos de quatro alunos, e um grupo de cinco. Entregamos as figurinhas e solicitamos que pensassem em uma solução, explicamos o que não poderia ser feito durante a divisão e enfatizamos que todo o processo deveria ser justo.

---

[1] Professor de Atendimento Educacional Especializado

Nesta sala surgiu uma solução distinta das apresentadas pela manhã, um grupo solucionou o problema da seguinte forma: o primeiro amigo recebeu três vasos vazios, três vasos cheios, e um vaso pelo meio. O segundo amigo recebeu cinco vasos pelo meio, um vaso cheio e um vaso vazio. O terceiro e último amigo recebeu uma divisão igual a do primeiro. Após isso, organizamos no quadro uma representação e atribuímos pontos ao grupo vencedor, solicitamos então que de maneira calma e organizada os alunos se encaminhassem ao refeitório da escola, para a realização do circuito de atividades.

Cada grupo se ocupou de uma atividade, e nos momentos certos eram encaminhados para a atividade seguinte de modo que todos os grupos participassem de todos os jogos. Uns minutos antes do final da segunda aula, retornamos à sala e fizemos a contabilização dos pontos adquiridos nos jogos, distribuímos os pirulitos a todos e os bombons para o grupo vencedor. Agradecemos a participação e nos encaminhamos para a próxima turma.

Turma 7° ano B, uma hora-aula, 14h50min – 15h40min Sala 9

Chegamos à sala do 7° B da professora Almira com 24 alunos presentes, os quais já esperavam por nós visto que a professora os havia preparado no dia anterior, explicando que viríamos. Os alunos indagaram imediatamente que hora nós os levaríamos para o refeitório, já que viram a turma anterior saindo e, a professora disse que seria um dia diferente. Explicamos então que eles deveriam se acalmar e esperar o momento certo para ir ao refeitório. A professora reforçou nossa fala e pediu que se sentassem e ficassem em silêncio. Após esse momento iniciamos de forma semelhante as demais aulas do projeto.

Dividimos a sala em quatro grupos com seis alunos cada, e solicitamos que resolvessem o problema dos 21 vasos. Os alunos demonstraram facilidade na resolução e poucos minutos depois já tínhamos o grupo vencedor, atribuímos uma pontuação a esse grupo e então explicamos o que aconteceria em seguida.

Visto a proximidade com o horário do intervalo, iniciamos o circuito de jogos na sala mesmo com o intuito de levá-los para o refeitório após o lanche. Dentro da sala conseguimos realizar apenas uma rodada e, então os alunos foram liberados para o intervalo. Na volta esperamos os minutos necessários para a limpeza das mesas e então encaminhamos os alunos ao refeitório.

Uns minutos antes do fim da aula, retornamos para a sala, atribuímos os pontos conquistados por cada grupo no circuito de atividades e distribuímos os pirulitos e bombons ao grupo vencedor. Agradecemos a professora Almira pôr a disponibilidade das aulas para que pudéssemos desenvolver nosso projeto. Nos encaminhamos então para a última aula do dia.

Turma 6° ano A, duas-hora aula, 15h55min – 17h35min Sala 3

Por fim, a última aula do projeto foi desenvolvida na sala do 6° B da professora Rejane, havia 24 alunos presentes. Os alunos estavam demasiadamente agitados no início da aula e, só vieram a se acalmar, quando a professora chamou a atenção de maneira enérgica. Durante o desenvolvimento dessa aula, tivemos alguns problemas em relação ao comportamento dos alunos, tivemos a necessidade de chamar a atenção constantemente. Após esse momento inicial, a contação da história e a explicação do porquê do dia da matemática ocorreu de maneira semelhante as demais aulas.

Organizamos a sala em grupos de seis alunos, e disponibilizamos o material de auxílio para resolver o problema proposto. Um dos grupos que estava ao fundo foi extremamente rápido na solução, e logo se manifestou positivamente por ter alcançado tal feito. Realizamos a formalização da resolução no quadro, e distribuímos os pirulitos e bombons para a equipe vencedora. Agradecemos a professora Rejane pela disponibilidade de suas aulas para o desenvolvimento do nosso projeto.

16. CONSIDERAÇÕES FINAIS.

O relatório acima produzido por nós, é resultado final de um longo processo de planejamento e execução. O projeto PROMAT começou muito antes do momento em que de fato iniciamos os encontros presenciais com os inscritos, foram semanas de planejamentos, ideias e expectativas até o esperado dia de colocarmos tudo em prática.

Desenvolver o projeto, trouxe uma vasta oportunidade de conhecimento e experiência a nós, disponibilizando um ambiente que possibilitou colocar em prática a teoria que aprendemos em sala de aula. Ministrar as aulas do PROMAT nos preparou para além do que imaginávamos, conhecer as mais diversas formas de pensar que nossos alunos dispunham, estar a frente de uma turma e ser responsável por conduzir uma aula foi de extrema valia. Contar com o apoio de nossas orientadoras constantemente, passou a segurança necessária para desenvolvermos as aulas com calma e confiança.

Por fim todos os relatos acima expostos contribuíram diretamente com nossa formação, deixaram uma marca importante no caminho que desejamos seguir.